



DISERTASI SS143507

**MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED  
MULTIVARIATE WEIBULL REGRESSION**

Studi Kasus : Pemodelan Indikator Pencemaran Air (COD, DO,  $PO_4$ )  
Pada Air Sungai di Surabaya Tahun 2013

SUYITNO  
NRP. 1312301003

PROMOTOR/CO-PROMOTOR  
Dr. Purhadi M.Sc.  
Dr. Sutikno, M.Si.  
Irhamah, M.Si., Ph.D.

PROGRAM DOKTOR  
DEPARTEMEN STATISTIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2017







DISERTASI SS143507

**MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED  
MULTIVARIATE WEIBULL REGRESSION**

Studi Kasus : Pemodelan Indikator Pencemaran Air (COD, DO,  $\text{PO}_4$ )  
Pada Air Sungai di Surabaya Tahun 2013

SUYITNO  
NRP. 1312301003

PROMOTOR/CO-PROMOTOR  
Dr. Purhadi, M.Sc.  
Dr. Sutikno, M.Si.  
Irhamah, M.Si., Ph.D.

PROGRAM DOKTOR  
DEPARTEMEN STATISTIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2017

## LEMBAR PENGESAHAN

Disertasi disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh  
gelar Doktor (Dr.)

di  
Program Doktor Departemen Statistika  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:  
Suyitno  
NRP. 1312301003

Tanggal Ujian : 17 Mei 2017  
Periode Wisuda: September 2017

Disetujui oleh:

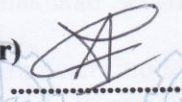
1. Dr. Purhadi, M.Sc.  
NIP. 19620204 198701 1 001

(Promotor)



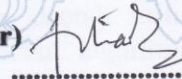
2. Dr. Sutikno, M.Si.  
NIP. 19710313 199702 1 001

(Co-Promotor)



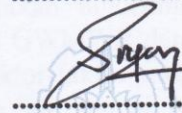
3. Irhamah, M.Si., Ph.D.  
NIP. 19780406 200112 2 002

(Co-Promotor)



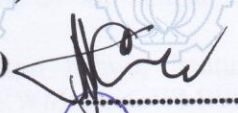
4. Dr. Sri Wahyuningsih, M.Si.  
NIP. 19690413 200012 2 001

(Penguji  
Eksternal)



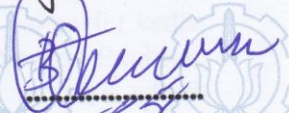
5. Dr. I Nyoman Latra, MS.  
NIP. 19511130 197901 1 001

(Penguji)



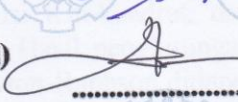
6. Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.  
NIP. 19650603 198903 1 003

(Penguji)



7. Dr. rer. pol. Heri Kuswanto, M.Si.  
NIP. 19820326 200312 1 004

(Penguji)



Dekan Fakultas MIPA

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
NIP. 19650605 198903 1 002



# **MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE WEIBULL REGRESSION**

**Studi Kasus : Pemodelan Indikator Pencemaran Air (COD, DO, PO<sub>4</sub>)  
Pada Air Sungai di Surabaya Tahun 2013**

Oleh : Suyitno  
Promotor : Dr. Purhadi, M.Sc.  
Co-Promotor : Dr. Sutikno, M.Si.  
Irhamah, M.Si., Ph.D.

## **ABSTRAK**

Penelitian ini membahas model regresi Weibull multivariat (RWM) dan model *geographically weighted multivariate Weibull regression* (GWMWR). RWM adalah model regresi yang dikembangkan dari distribusi Weibull multivariat, yakni fungsi kepadatan peluang bersama distribusi Weibull multivariat, dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam parameter regresi. Model RWM dikonstruksi dari fungsi survival bersama distribusi Weibull multivariat. Model GWMWR adalah model RWM dengan semua parameter bergantung pada lokasi geografis, dan penaksiran parameter dilakukan secara lokal pada setiap lokasi pengamatan menggunakan pembobot spasial.

Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan penaksir parameter model RWM dan GWMWR menggunakan metode *maximum likelihood estimation* (MLE); mendapatkan statistik uji, distribusi statistik uji dan daerah kritis pengujian hipotesis parameter regresi model RWM; mendapatkan algoritma penaksiran parameter model RWM dan GWMWR; mendapatkan algoritma pengujian hipotesis parameter model RWM; mendapatkan model GWMWR data indikator pencemaran air COD, DO dan PO<sub>4</sub> dan mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR indikator pencemaran air sungai di Surabaya.

Berdasarkan hasil penaksiran parameter disimpulkan bahwa, bentuk eksplisit (*closed form*) penaksir *maximum likelihood* model RWM dan GWMWR tidak dapat ditemukan secara analitik, dan hampiran penaksir parameter kedua model tersebut diperoleh secara numerik dengan metode iteratif Newton-Raphson. Statistik uji pengujian parameter regresi model RWM secara serentak adalah statistik Wilk's *likelihood ratio*. Statistik Wilk berdistribusi Khi-kuadrat, dan diturunkan berdasarkan metode *likelihood ratio test* (LRT). Hasil penghitungan penaksir parameter secara iteratif berdasarkan algoritma Newton-Raphson didapat penaksir parameter model RWM dan GWMWR yang konvergen.

Berdasarkan nilai BIC dan AIC, model GWMWR lebih baik dari pada model RWM dalam pemodelan indikator pencemaran air COD, DO dan PO<sub>4</sub>. Model GWMWR indikator pencemaran air terbaik diperoleh dari hasil penaksiran parameter menggunakan fungsi pembobot Gauss adaptif. Model GWMWR terbaik dipilih dari hasil-hasil penaksiran parameter dengan pembobot spasial fungsi Gauss adaptif, *bi-square* adaptif dan *tricube* adaptif, yang memberikan nilai BIC minimum. Berdasarkan hasil pengujian hipotesis terhadap seluruh parameter regresi disimpulkan bahwa, debit air, konsentrasi deterjen dan TSS

berpengaruh signifikan terhadap model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo; kecepatan aliran air, debit air dan TSS berpengaruh signifikan terhadap model GWMWR pada Kali Makmur di Lidah Kulon dan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus, Kali Surabaya di Jembatan Wonokromo, Kali Mas di Jembatan Ngagel, Kali Mas di Jembatan Keputran Selatan, Saluran Darmo di Pompa air Darmo Kali dan Bozem Kedurus adalah kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen dan TSS.

**Kata kunci** : Model RWM, GWMWR, MLE, statistik Wilk, LRT, statistik Wald.

***GEOGRAPHICALLY WEIGHTED  
MULTIVARIATE WEIBULL REGRESSION MODEL***  
**Case Study : The River Water Pollution Indicators (COD, DO, PO<sub>4</sub>)  
on the River Water in Surabaya 2013**

By : Suyitno  
Promotor : Dr. Purhadi, M.Sc.  
Co-Promotor : Dr. Sutikno, M.Si.  
Irhamah, M.Si., Ph.D.

**ABSTRACT**

This study discusses a multivariate Weibull regression (MWR) and *geographically weighted multivariate Weibull regression* (GWMWR) models. MWR is a regression model developed from a multivariate Weibull distribution, namely the joint probability density function of the multivariate Weibull distribution in which the scale parameters are stated in the term of the regression parameters. The MWR model is constructed from a joint survival function of the multivariate Weibull distribution. The GWMWR is a MWR model which all of the parameters depend on the geographical location, and parameter estimation is done locally at each location in the study area using the spatial weighting.

The aims of this study are to obtain the estimated parameters of the MWR and GWMWR models using maximum likelihood estimation (MLE) method; to test the regression parameters of the MWR model; to obtain an algorithm on the parameter estimation and testing the regression parameter; to obtain the best model of GWMWR applied to the river water pollution indicators data and to obtain the factors which influence the GWMWR model applying to the data of the river water pollution indicators COD, DO and PO<sub>4</sub> in the Kali Surabaya.

The result shows that the maximum likelihood estimator for both MWR and GWMWR models are not closed form, and they can be optimized by using the Newton-Raphson iterative method. The test statistic for simultaneous test of the MWR model is Wilk's likelihood ratio. Wilk statistic follows Chi-square distribution and it can be derived from the *likelihood ratio test* (LRT) method. The result of calculating of the parameter estimation iteratively using the Newton-Raphson algorithm yields the convergent parameter estimator of the MWR and GWMWR models.

Based on the BIC and AIC values, the GWMWR model outperforms RWM model applied to the data of the river water pollution indicators COD, DO and PO<sub>4</sub>. The best of GWMWR model is selected from the results of parameter estimation using the Gaussian weighting function, bi-square and tri-cube adaptive resulting the minimum BIC. Considering the result of testing regression parameter, it can be concluded that the river water discharge, detergent and TSS influence the GWMWR model on the Kali Mas in Kebon Rojo bridge; the speed of water stream, the river water discharge and TSS influence the GWMWR model on the Kali Makmur in Lidah Kulon and the factors affecting the GWMWR model on the Kali Surabaya in Kedurus, Kali Surabaya in Wonokromo bridge, Kali Mas in Ngagel bridge, Kali Mas in Keputran Selatan bridge, Darmo channel

in Darmo Kali water pump and Bozem Kedurus are the speed of water stream, the river water discharge, detergent and TSS.

**Keywords:** MWR, GWMWR, MLE, Wilk statistic, LRT, Wald statistic.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis haturkan kepada Allah SWT, Tuhan Yang Maha Esa, yang telah memberikan rahmat-Nya, sehingga penulisan disertasi ini dapat diselesaikan. Penulisan disertasi ini untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Doktor (Dr.) pada Program Doktor Departemen Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Dalam penulisan disertasi ini, penulis telah banyak mendapat bimbingan, petunjuk dan bantuan dari berbagai pihak, oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Direktorat Jenderal Sumberdaya Iptek dan Dikti, Kementerian Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi yang telah memberikan beasiswa BPPS (BPPDN) kepada penulis.
2. Dr. Suhartono, M.Sc., sebagai ketua Departemen Statistika yang telah banyak memberikan petunjuk dan informasi akademik program Doktor Statistika ITS Surabaya.
3. Dr. rer. pol. Heri Kuswanto, M.Si., sebagai Ketua Program Studi Pascasarjana Departemen Statistika FMIPA ITS Surabaya, sebagai tim penguji dan dosen wali yang telah memberikan motivasi, bimbingan akademik, memberikan saran dan masukan dalam perbaikan penulisan disertasi ini.
4. Dr. Purhadi, M.Sc., sebagai promotor yang telah banyak memberikan bimbingan, saran, motivasi dan dukungan fasilitas dalam penulisan disertasi ini.
5. Dr. Sutikno, M.Si. dan Irhamah, M.Si., Ph.D., sebagai co-promotor yang telah banyak memberikan bimbingan, arahan, masukan, saran dan motivasi dalam penulisan disertasi ini.
6. Dr. I Nyoman Latra, MS. dan Prof. Dr. I Nyoman Budiantara, M.Si., sebagai tim penguji yang telah banyak memberikan saran dan masukan dalam revisi dan perbaikan penulisan disertasi ini.
7. Dr. Sri Wahyuningsih, M.Si., sebagai penguji eksternal yang telah banyak memberikan motivasi dan saran dalam perbaikan penulisan disertasi ini.

8. R. Mohamad Atok, M.Si. Ph.D. dan Santi Puteri Rahayu, M.Si. Ph.D., sebagai tim validasi yang telah banyak memberikan masukan, saran dan koreksi dalam penulisan disertasi ini.
9. Dosen Departemen Statistika yang telah memberikan ilmu yang sangat membantu dalam penulisan disertasi ini.
10. Staf Tata Usaha dan Karyawan Departemen Statistika FMIPA ITS Surabaya yang telah memberikan kemudahan dan fasilitas sehingga sangat membantu dalam penulisan disertasi ini.
11. Dosen Program Studi Statistika FMIPA Unmul yang telah memberikan dukungan, doa dan motivasi selama penulis studi.
12. Istri tercinta Endang Sunarti dan ketiga anak saya tersayang Pratama July Nugraha, Dwi Feby Anindita dan Junior Try Admaja yang telah banyak memberikan bantuan doa dan motivasi selama penulis studi.
13. Kedua orang tua saya Bapak Djiyat dan Almarhumah Ibu Sudji, serta kedua mertua saya Almarhum H. Kasiyanto dan Almarhumah Ibu Hj. Sutiah yang telah banyak memberikan dukungan doa dan finansial selama penulis studi.
14. Rekan-rekan mahasiswa S3 Statistika ITS yang telah memberikan bantuan dan motivasi dalam penulisan disertasi ini.

Penulis berharap agar disertasi ini dapat berkontribusi dalam memajukan ilmu pengetahuan. Penulis menyadari, penulisan disertasi ini masih banyak kekurangan dan kelemahan, untuk itu saran dan kritik yang konstruktif dari berbagai pihak sangat diharapkan untuk penyempurnaan disertasi ini.

Surabaya, Mei 2017

Suyitno  
NRP. 1312301003

## DAFTAR ISI

	Halaman
Halaman Judul .....	i
Lembar Pengesahan Disertasi .....	ii
Abstrak .....	iii
Abstract .....	v
Kata Pengantar .....	vii
Daftar Isi .....	ix
Daftar Lambang dan Arti .....	xii
Daftar Gambar .....	xiv
Daftar Tabel .....	xv
Daftar Teorema dan Lemma .....	xvii
Daftar Lampiran .....	xviii
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	3
1.3. Tujuan Penelitian .....	8
1.4. Orisinalitas Penelitian .....	8
1.5. Manfaat Penelitian .....	11
1.6. Batasan Masalah .....	11
1.7. Sistematika Penulisan .....	12
<b>BAB 2. LANDASAN TEORI</b> .....	<b>13</b>
2.1. Distribusi Weibull .....	13
2.1.1. Distribusi Weibull Univariat .....	13
2.1.2. Distribusi Weibull Multivariat .....	18
2.2. Model Regresi Weibull Univariat .....	25
2.3. Model <i>Geographically Weighted Univariate Weibull Regression</i> .....	29
2.4. Pembobot Spasial Model GWR .....	35
2.5. Beberapa Definisi dan Teorema Dasar .....	38
2.6. Sifat Asimtotik Penaksir <i>Maximum Likelihood</i> .....	43

2.7. Pengujian Distribusi .....	45
2.8. Pengujian Multikolinieritas .....	47
2.9. Pengujian Heterogenitas Spasial .....	48
2.10. Kondisi Kali Surabaya dan Sumber Pencemar Air Sungai ....	49
2.11. Padatan Tersuspensi Total ( <i>Total Suspended Solid</i> ) .....	51
2.12. Lebar, Kedalaman, Kecepatan Aliran dan Debit Air Sungai	52
2.13. Indikator Pencemaran Air COD, DO dan Fosfat .....	53
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN .....</b>	<b>57</b>
3.1. Tahapan Penelitian Kajian Teori .....	57
3.1.1. Penaksiran dan Pengujian Hipotesis Parameter Model RWM .....	57
3.1.2. Penaksiran Parameter Model GWMWR .....	63
3.1.3. Tahapan Pembuatan Algoritma .....	65
3.2. Tahapan Penelitian Kajian Empiris .....	65
3.2.1. Sumber Data .....	66
3.2.2. Lokasi Penelitian dan Teknik Sampling .....	66
3.2.3. Peubah Penelitian .....	69
3.2.4. Tahapan Analisis Data .....	70
<b>BAB 4. PENAKSIRAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MODEL REGRESI WEIBULL MULTIVARIAT .....</b>	<b>75</b>
4.1. Penaksiran Parameter FKP Distribusi Weibull Multivariat .....	75
4.2. Model Regresi Weibull Multivariat .....	88
4.3. Penaksiran Parameter Model RWM .....	89
4.4. Algoritma Penaksiran Parameter Model RWM .....	118
4.5. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM secara Serentak .....	120
4.6. Algoritma Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM .....	134
<b>BAB 5. PENAKSIRAN PARAMETER MODEL GWMWR .....</b>	<b>137</b>
5.1. Model GWMWR .....	137
5.2. Penaksiran Parameter Model GWMWR .....	138
5.3. Algoritma Penaksiran Parameter Model GWMWR .....	144



<b>BAB 6. PENERAPAN MODEL GWMWR PADA DATA INDIKATOR PENCEMARAN AIR SUNGAI DI SURABAYA .....</b>	<b>147</b>
6.1. Deskripsi Data Respon dan Data Kovariat .....	147
6.2. Pendeteksian Multikolinieritas antar Kovariat .....	148
6.3. Pengujian Distribusi .....	149
6.4. Penaksiran Parameter Model RWM .....	151
6.5. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM .....	154
6.5.1. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM secara Serentak .....	155
6.5.2. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM secara Parsial .....	156
6.6. Interpretasi Model RWM .....	157
6.7. Pengujian Heterogenitas Spasial .....	161
6.8. Penaksiran Parameter Model GWMWR .....	162
6.9. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model GWMWR .....	168
6.9.1. Pengujian Hipotesis Parameter Model GWMWR secara Serentak .....	168
6.9.2. Pengujian Hipotesis Parameter Model GWMWR secara Parsial .....	169
6.10. Interpretasi Model GWMWR .....	174
<b>BAB 7. KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>	<b>177</b>
7.1. Kesimpulan .....	177
7.2. Saran .....	182
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>185</b>
<b>DAFTAR RIWAYAT HIDUP .....</b>	<b>191</b>
<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>193</b>

## DAFTAR LAMBANG DAN ARTI

$i, j$	: Indek pengamatan
$k, l$	: Indek variat respon ( $Y_k$ adalah respon ke- $k$ )
$y_{ki}$	: Pengamatan ke- $i$ untuk respon ke- $k$ ; $k = 1, 2, \dots, m$ dan $i = 1, 2, \dots, n$
$h$	: Indek kovariat
$h^*$	: Indek kovariat
$X_{hi}$	: Pengamatan ke- $i$ untuk kovariat (peubah bebas) ke- $h$ ; $h = 1, 2, \dots, p$ dan $i = 1, 2, \dots, n$
$j^*$	: Permutasi ke- $j^*$ untuk peubah ( $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ ) dengan $j^* = 1, 2, \dots, m!$
$m$	: Banyaknya respon (banyaknya variat)
$p$	: Banyaknya peubah bebas atau kovariat (prediktor)
$n$	: Banyaknya pengamatan (ukuran sampel)
$\delta$	: Parameter lokasi pada distribusi Weibull univariat tiga parameter
$\eta$	: Parameter skala pada distribusi Weibull univariat tiga parameter
$\lambda$	: Parameter skala pada distribusi Weibull univariat dua parameter atau distribusi Weibull multivariat
$\gamma$	: Parameter bentuk pada distribusi Weibull (univariat atau multivariat)
$a$	: Parameter ukuran derajat <i>dependence</i>
$\alpha$	: Taraf uji
$q$	: Indek notasi sigma pada vektor gradien dan matriks Hessian
$q^*$	: Indek iterasi pada algoritma iterasi Newton-Raphson
$\Phi$	: Vektor parameter pada penaksiran parameter distribusi Weibull univariat
$\theta$	: Vektor parameter model Regresi Weibull (RWM)
$\theta(\mathbf{u}_i)$	: Vektor parameter model GWMWR
$\mathbf{g}$	: Vektor gradien atau vektor skor
$\mathbf{H}$	: Matriks Hessian
$\mathbf{u}_i$	: Koordinat lokasi pengamatan ke- $i$ , yakni $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$
$d_{ij}$	: Jarak antara lokasi pengamatan ke- $i$ dengan lokasi pengamatan ke- $j$
$b_i$	: <i>Bandwidth</i> pada penaksiran parameter model GWMWR di lokasi ke- $i$
$w_{ij}$	: Pembobot spasial (faktor lokasi geografis) yang diberikan kepada pengamatan ke- $j$ untuk model pada lokasi ke- $i$

$P$	: Peluang atau probabilitas
$P_\ell^n$	: Permutasi $n$ obyek dengan $\ell$ obyek sama
$\mathcal{L}(\cdot)$	: Fungsi <i>likelihood</i>
$L(\cdot)$	: Fungsi <i>log-likelihood</i>
$f(\cdot)$	: Fungsi kepadatan peluang (FKP)
$h_Y(\cdot)$	: Fungsi <i>hazard</i>
$H(\cdot)$	: Fungsi <i>hazard</i> kumulatif
$F(\cdot)$	: Fungsi distribusi kumulatif teoritis
$F_n(\cdot)$	: Fungsi distribusi kumulatif empiris
$S(\cdot)$	: Fungsi <i>survival</i>
$R^2$	: Koefisien determinasi pada model regresi linear
$\mathbf{R}$	: Matriks korelasi
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan riil
$\mathbb{R}^+$	: Himpunan bilangan riil positif
$r$	: Koefisien korelasi Pearson
$\partial^m$	: Turunan parsial orde ke- $m$
$\Gamma(\cdot)$	: Fungsi gamma
VIF	: <i>Variance inflating factor</i>
$N(\cdot)$	: Distribusi normal univariat
$\mathbf{N}(\cdot)$	: Distribusi normal multivariat
$\chi_{db}^2$	: Distribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas $db$
$\mathbf{I}_m$	: Matriks identitas orde $m$
$Z_{\alpha/2}$	: Kuantile ke $\alpha/2$ distribusi normal standar
■	: Simbol terbukti pada pembuktian suatu teorema atau lemma
$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]$	: Matriks informasi Fisher

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 <i>Road Map</i> Penelitian .....	10
Gambar 2.1 Grafik FKP Distribusi Weibull Univariat .....	15
Gambar 2.2 Grafik Permukaan FKP Distribusi Weibull Bivariat (2.20) dengan Nilai-nilai Parameter Berbeda .....	21
Gambar 3.1 Lokasi Pemantauan (Titik Sampel) Air Badan Air Tahun 2013 .....	68
Gambar 3.2 Diagram Alir Tahapan Analisis Data .....	71



## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Lokasi Pengamatan .....	67
Tabel 3.2 Peubah Penelitian dan Satuan Pengukurannya .....	69
Tabel 3.3 Struktur Data Pengamatan Model GWMWR .....	70
Tabel 6.1 Deskripsi Data Respon .....	147
Tabel 6.2 Deskripsi Data Kovariat .....	148
Tabel 6.3 Nilai VIF Kovariat Penelitian .....	149
Tabel 6.4 Penaksir Parameter FKP Distribusi Weibull Trivariat Populasi .....	149
Tabel 6.5 Nilai Statistik Uji $D$ pada Uji K-S Trivariat .....	150
Tabel 6.6 Penaksir Parameter Derajat <i>Dependence</i> dan Parameter Bentuk Model RWM .....	152
Tabel 6.7 Komponen-komponen Vektor Penaksir Parameter Regresi $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan Nilai Statistik $Z_n^2$ Penaksir Parameter Regresi Model RWM .....	153
Tabel 6.8 Hasil Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM secara Serentak .....	155
Tabel 6.9 Hasil Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM secara Parsial .....	157
Tabel 6.10 Rasio Nilai Fungsi <i>Survival</i> .....	158
Tabel 6.11 Prediksi Nilai Pengamatan Respon .....	160
Tabel 6.12 Hasil Pengujian Heterogenitas Spasial Model RWM .....	161
Tabel 6.13 Nilai BIC dan AIC Model GWMWR Berdasarkan Fungsi Pembobot Spasial .....	163
Tabel 6.14 Pembobot Spasial menggunakan Fungsi Pembobot Gauss ...	163
Tabel 6.15 Penaksir Parameter Derajat <i>Dependence</i> dan Parameter Bentuk Model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus	165
Tabel 6.16 Vektor Penaksir Parameter Regresi Model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus .....	165
Tabel 6.17 Hasil Pengujian Hipotesis Parameter Regresi secara Parsial Model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus .....	170
Tabel 6.18 Hasil Pengujian Hipotesis Parameter Regresi secara Parsial Model GWMWR pada Kali Mas di Kebon Rojo .....	171

Tabel 6.19 Faktor-faktor yang Berpengaruh terhadap Model GWMWR	172
Tabel 6.20 Nilai BIC dan AIC Model RWM dan GWMWR .....	174
Tabel 6.21 Rasio Nilai Fungsi <i>Survival</i> Pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo .....	175

## DAFTAR TEOREMA DAN LEMMA

Lemma 4.1 .....	90
Lemma 4.2 .....	97
Lemma 4.3 .....	101
Lemma 4.4 .....	105
Lemma 4.5 .....	109
Teorema 4.1 .....	120
Lemma 4.6 .....	123
Teorema 4.2 .....	125
Teorema 4.3 .....	128

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 .....	193
Lampiran 2 .....	194
Lampiran 3 .....	195
Lampiran 4 .....	200
Lampiran 5 .....	202
Lampiran 6 .....	205
Lampiran 7 .....	208
Lampiran 8 .....	211
Lampiran 9 .....	230
Lampiran 10 .....	251
Lampiran 11 .....	258
Lampiran 12 .....	264



# **BAB 1**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1. Latar Belakang**

Secara historis penamaan distribusi Weibull diambil dari nama ilmuwan yang pertama kali mendeklarasikan distribusi Weibull ke dunia internasional, yaitu seorang ilmuwan dari Swedia yang bernama Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (1922-1943). Distribusi Weibull mula-mula digunakan pada aplikasi bidang rekayasa (*engineering*), dan kemudian dikembangkan pada teori probabilitas dan statistika. Dalam perkembangannya sejak setengah abad yang lalu, distribusi Weibull telah menjadi perhatian serius para ahli di berbagai bidang dan telah banyak penelitian-penelitian yang menerapkan distribusi Weibull, seperti bidang rekayasa, fisika dan kimia, meteorologi, hidrologi, farmasi, medis, biometri, ekonomi-bisnis, geografi, geologi, astronomi, kehutanan dan sebagainya (Rinne, 2009).

Beberapa peneliti tentang penerapan distribusi Weibull univariat pada bidang meteorologi, energi dan kehutanan antara lain Wong (1977), Ulgen dan Hepbasli (1982), Carlin dan Haslett (1982), Conradsen dan Nielsen (1984), Wilks (1988), Al-Fauzan (2000) dan Lei (2008). Peneliti-peneliti tersebut pada umumnya membahas penentuan distribusi dan penaksiran parameter distribusi Weibull univariat. Metode yang digunakan pada penaksiran parameter adalah metode *maximum likelihood* (MLE), metode momen dan metode kuadrat terkecil.

Seiring perkembangan distribusi Weibull univariat, para ahli juga telah mengembangkan distribusi Weibull multivariat yang melibatkan lebih dari satu peubah. Salah satu bagian penting dari perkembangan distribusi Weibull multivariat adalah pada pemodelan fungsi kepadatan peluang (FKP) bersama, sehingga terdapat variasi model FKP. Pada distribusi Weibull terdapat beberapa fungsi yang saling berhubungan, yaitu FKP, fungsi distribusi kumulatif, fungsi *hazard* dan fungsi *survival*. Jika salah satu fungsi tersebut diketahui, maka fungsi-fungsi yang lain dapat ditentukan. Beberapa ahli statistika yang telah berkontribusi dalam pemodelan distribusi Weibull bivariat dan multivariat antara lain adalah Lee (1979), Spurrier dan Weier (1981), Hougaard (1986), Lu (1989),

Lu dan Bhattacharyya (1990), Hanagal (1996), Han (2006), Lee dan Wen (2009) serta Flores (2010).

Distribusi Weibull univariat awalnya bergantung pada tiga parameter (Rinne, 2009), yaitu parameter lokasi (*location*), parameter skala (*scale*) dan parameter bentuk (*shape*). Distribusi Weibull dua atau satu parameter adalah bentuk khusus distribusi Weibull tiga parameter. Salah satu bentuk khusus distribusi Weibull tiga parameter adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk (*scale-shape*), yaitu distribusi Weibull yang memuat dua parameter, yakni parameter skala dan bentuk. Parameter bentuk distribusi Weibull mempunyai peranan penting, yaitu dapat menghasilkan bentuk distribusi Weibull bervariasi yang menyerupai bentuk distribusi lain seperti distribusi normal dan eksponensial. Parameter skala distribusi Weibull secara umum berperan pada perubahan nilai distribusi Weibull, yakni semakin kecil nilai parameter skala, nilai FKP akan semakin besar.

Sebagai pengembangan distribusi Weibull, bahwa parameter skala atau parameter bentuk bisa bergantung atau dipengaruhi langsung oleh kovariat (peubah bebas) yang menghasilkan model regresi Weibull (Lawless, 2003; Rinne, 2009). Penambahan peubah lain (*supplementary variables*) pada distribusi untuk menjelaskan atau mempengaruhi perubahan nilai fungsi-fungsi pada distribusi Weibull. Model regresi yang dikembangkan (dikonstruksi) dari distribusi Weibull antara lain model regresi Cox Weibull atau *proportional hazard* Weibull, model *accelerated failure time* dan model regresi Weibull. Model regresi Weibull adalah model regresi yang dikonstruksi dari FKP distribusi Weibull dengan parameter skala atau bentuk dinyatakan dalam model regresi.

Beberapa peneliti yang telah membahas distribusi Weibull antara lain Wahyudi dkk (2011), yang membahas pengembangan penaksiran parameter fungsi *hazard* Weibull trivariat dengan metode MLE. Fungsi *hazard* yang dikaji oleh Wahyudi dkk (2011) diturunkan dari distribusi Weibull trivariat yang dikemukakan oleh Lee dan Wen (2009). Penaksir parameter fungsi *hazard* Weibull trivariat tersebut diperoleh melalui penaksiran parameter FKP distribusi Weibull trivariat berdasarkan sifat invarian penaksir MLE, yakni penaksir parameter fungsi *hazard* didapat dari hasil bagi penaksir FKP dengan penaksir

fungsi *survival* distribusi Weibull trivariat.

Beberapa peneliti yang telah membahas model regresi Weibull antara lain adalah O'Quigley dan Roberts (1980) membahas model regresi Weibull univariat pada waktu survival. Hanagal (2004, 2005, 2006) membahas model regresi Weibull bivariat yang dikembangkan (dikonstruksi) dari FKP distribusi eksponensial bivariat yang dikemukakan oleh Freund (1961) dan Marshall-Olkin (1967) dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi dengan kovariat yang sama dan dengan koefisien regresi yang berbeda. Model regresi Weibull bivariat yang dikemukakan oleh Hanagal (2004, 2005, 2006) diterapkan pada data *lifetime* atau data waktu survival tersensor. Quraisy dan Purhadi (2012) mengkaji pengujian hipotesis parameter regresi model regresi Weibull bivariat yang dikembangkan oleh Hanagal (2005). Hidayanti dkk (2015) mengkaji penaksiran parameter model regresi Weibull bivariat dengan metode MLE, dimana model regresi Weibull bivariat dikonstruksi dari fungsi survival bersama distribusi Weibull bivariat yang dikembangkan oleh Lee dan Wen (2009), dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi.

## **1.2. Rumusan Masalah**

Pembahasan model regresi Weibull multivariat saat ini masih terbatas pada model regresi Weibull bivariat yang dikembangkan oleh Hanagal (2004, 2005, 2006), sementara itu banyak permasalahan pada beberapa bidang tertentu seperti bidang kesehatan dan lingkungan, yang melibatkan lebih dari dua data respon yang penyelesaiannya memerlukan model regresi Weibull multivariat. Sebagai pengembangan metode statistika pada model regresi Weibull dan pemenuhan tuntutan bidang-bidang tertentu yang menerapkan model regresi Weibull multivariat, maka pada penelitian ini dibahas model regresi Weibull multivariat (RWM). Model RWM yang dibahas pada penelitian ini dikonstruksi dari fungsi *survival* bersama distribusi Weibull multivariat yang dikemukakan oleh Lee dan Wen (2009), dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam parameter regresi. Penentuan penaksir parameter, statistik uji, distribusi statistik uji dan daerah kritis pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak pada model RWM yang dikembangkan dari distribusi Weibull multivariat yang dikemukakan

oleh Lee dan Wen (2009) merupakan permasalahan penelitian ini.

Penentuan penaksir parameter model RWM yang diterapkan pada data spasial juga merupakan permasalahan penelitian ini. Pemodelan RWM pada data spasial menjadi bahasan yang menarik dan perlu dikaji, karena data spasial adalah tipe data yang memuat atribut dan informasi lokasi geografis, sehingga terdapat saling ketergantungan antara data dan lokasi geografis (Fotheringham dkk, 2002). Saling ketergantungan antara data dan lokasi geografis menyebabkan penaksir parameter pada setiap lokasi akan berbeda. Penggunaan model regresi klasik atau model global untuk pemodelan regresi Weibull pada data spasial menghasilkan model yang tidak valid. Oleh karena itu diperlukan metode yang cocok, yang dapat mengakomodasi penerapan model RWM pada data spasial, dan metode yang sesuai adalah metode *Geographically Weighted Regression* (GWR).

Metode GWR adalah metode statistika untuk menganalisis data spasial berdasarkan model regresi lokal (Purhadi dan Yasin, 2012). Beberapa keunggulan metode GWR berdasarkan hasil penelitian sebelumnya adalah sebagai berikut : Berdasarkan metode GWR, bahwa setiap parameter regresi bergantung pada lokasi geografis, sehingga penaksiran parameter dilakukan secara lokal di setiap lokasi (daerah) pengamatan dan menghasilkan model-model lokal. Metode GWR adalah metode yang efektif untuk pemodelan regresi data spasial, dapat digunakan mengeksplorasi variasi parameter dan juga dapat digunakan pengujian signifikansi heterogenitas spasial (Leung dkk, 2000).

Metode GWR dapat digunakan untuk menganalisis data spasial pada berbagai bidang secara global dan lokal dengan memperhatikan faktor lokasi geografis sebagai pembobot pada penaksiran parameter (Harini dkk, 2012). Penaksiran parameter model linear multivariat spasial dengan pembobotan lokasi geografis, menghasilkan penaksir parameter model lokal yang tidak bias, efisien dan konsisten (Harini dkk, 2010). Metode GWR dapat menentukan penaksir parameter regresi pada setiap lokasi pengamatan dan menghasilkan nilai taksiran respon yang lebih akurat dari pada model global. Residual model GWR mempunyai distribusi spasial yang lebih sesuai dari pada residual yang dihasilkan model global (Zhang dkk, 2005). Penerapan metode GWR pada model regresi Poisson multivariat menunjukkan bahwa model *geographically weighted*

*multivariate Poisson regression* (GWMPR) lebih baik dari model global didasarkan pada nilai *Akaike Information Criterion* atau AIC (Triyanto dkk, 2015). Model RWM yang diterapkan pada data spasial, untuk selanjutnya pada penelitian ini dinamakan model *Geographically Weighted Multivariate Weibull Regression* (GWMWR). Bagaimana menentukan penaksir parameter model GWMWR merupakan permasalahan penelitian ini.

Permasalahan berikutnya penelitian ini adalah bagaimana penerapan model GWMWR pada data riil sehingga dapat berkontribusi dalam pemecahan masalah yang terjadi di masyarakat. Model GWMWR ini diterapkan pada data indikator pencemaran air sungai, yang merupakan data kontinu non-negatif (bukan data *lifetime*), dan berdasarkan pemodelan GWMWR ini dapat ditemukan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap indikator pencemaran air, sehingga dapat berkontribusi dalam memberikan informasi tentang pencemaran air sungai di Surabaya. Penerapan model regresi Weibull pada data indikator pencemaran air sungai yang melibatkan lebih dari dua peubah perlu dikaji dan dikembangkan sebagai salah satu bentuk pengembangan metode statistika yang diterapkan pada bidang lingkungan.

Indikator yang umum digunakan dalam penentuan pencemaran air sungai adalah *dissolved oxygen* (DO), *biochemical oxygen demand* (BOD), *chemical oxygen demand* (COD) dan kandungan zat organik (anorganik) dalam air seperti nitrat, nitrit, amonia, fosfat (fosfor) dan deterjen (Sastrawijaya, 2009). Kandungan logam berat dalam air seperti merkuri, timbal, arsenik, kadmium, khromium dan nikel juga dapat menyebabkan pencemaran air (Fardiaz, 1992). Oksigen terlarut (DO) berasal dari proses fotosintesis tanaman air dan dari atmosfer yang masuk kedalam air dengan kecepatan terbatas. Oksigen terlarut hasil fotosintesis jumlahnya tidak tetap bergantung pada jumlah tanaman air. Oksigen merupakan faktor pembatas dalam penentuan kehadiran makhluk hidup, sehingga penentuan kadar oksigen terlarut dapat dijadikan ukuran (indikator) penentuan kualitas air. BOD menyatakan jumlah oksigen yang dibutuhkan oleh bakteri pengurai untuk memecah atau mengoksidasi bahan-bahan buangan organik di dalam air. Adanya bahan buangan organik di dalam air dapat menaikkan BOD dan menurunkan DO (Fardiaz, 1992). Peningkatan jumlah bahan buangan organik dalam air dapat

meningkatkan jumlah bakteri pengurai aerobik, sehingga konsumsi oksigen oleh bakteri untuk menguraikan bahan-bahan organik meningkat, dan sebaliknya sisa oksigen terlarut (DO) menurun. COD menunjukkan jumlah oksigen yang dikonsumsi oleh bahan oksidan seperti kalium dikromat untuk mengoksidasi bahan-bahan organik di dalam air. Jumlah kandungan bahan organik di dalam air dapat diketahui melalui uji COD, yaitu suatu uji untuk mengukur jumlah oksigen yang dibutuhkan untuk mengoksidasi bahan-bahan organik melalui reaksi kimia. Semakin banyak bahan oksidan (bahan pencemar) dalam air sungai semakin banyak oksigen terlarut yang diikat (dikonsumsi).

Senyawa fosfat dalam ekosistem air terdapat dalam tiga bentuk, yaitu senyawa fosfor anorganik seperti ortofosfat ( $\text{PO}_4^{3-}$ ), senyawa organik dalam protoplasma dan sebagai senyawa organik terlarut yang terbentuk karena kotoran atau tubuh organisme yang mengurai. Peningkatan senyawa fosfat dalam air mendorong kegiatan pengikatan nitrogen (eutrofikasi) oleh ganggang biru yang mengakibatkan tumbuh suburnya ganggang dan enceng gondok. Kenaikan konsentrasi fosfat dalam air mengindikasikan adanya zat pencemar dalam air (Achmad, 2004). Senyawa fosfat dalam air sungai berasal dari deterjen sisa cucian, limbah industri, kotoran hewan, pupuk yang terlarut, dan sisa tanaman atau hewan yang mati, sehingga peningkatan bahan-bahan tersebut dapat meningkatkan konsentrasi fosfat dalam air sungai (Sastrawijaya, 2009). Pada umumnya lingkungan daerah aliran sungai (DAS) di Surabaya adalah pemukiman penduduk, industri, area pertanian dan peternakan yang berpotensi menghasilkan bahan buangan yang dapat meningkatkan konsentrasi fosfat dalam air sungai. Berdasarkan lingkungan DAS di Surabaya, maka model GWMWR pada penelitian ini diterapkan pada data indikator pencemaran air COD, DO dan konsentrasi fosfat ( $\text{PO}_4$ ).

Data indikator pencemaran air COD, DO dan  $\text{PO}_4$  dapat dikategorikan sebagai data kejadian multivariat (*multivariate event processes*), karena pada setiap titik sampel air sungai dapat ditentukan nilai (level) COD, DO dan  $\text{PO}_4$ . Nilai COD, DO dan konsentrasi  $\text{PO}_4$  dalam aliran sungai bergantung pada jenis bahan buangan (limbah) dalam aliran sungai, sedangkan jenis limbah pada aliran sungai bergantung pada lingkungan DAS. Berdasarkan sumbernya, limbah

organik dan nonorganik dalam aliran sungai dapat berasal dari limbah domestik dan limbah nondomestik. Limbah domestik adalah bahan buangan yang berasal dari rumah tangga, apotek, rumah sakit, hotel, dan restoran, sedangkan limbah nondomestik adalah bahan buangan yang berasal dari industri, pertanian, peternakan dan perikanan.

Data indikator pencemaran air COD, DO dan  $PO_4$  diduga merupakan data spasial, yakni data yang memuat informasi lokasi geografis dan atribut, yang nilainya bergantung pada lingkungan DAS termasuk DAS hulu. Nilai COD, DO dan konsentrasi  $PO_4$  juga dipengaruhi oleh sifat fisik air sungai (seperti jumlah zat padat terlarut dan total padatan tersuspensi), dipengaruhi oleh sifat fisik badan air (seperti lebar sungai, kedalaman sungai, kecepatan aliran air, debit air sungai), serta dipengaruhi oleh bahan buangan dalam aliran sungai (Sastrawijaya, 2009).

Kajian penerapan model GWMWR pada data indikator pencemaran air sungai belum pernah dilakukan. Kajian penerapan model regresi pada data indikator pencemaran air sungai antara lain penelitian yang dilakukan oleh Khaulasari (2014) dan Hidayanti (2015). Khaulasari (2014) membahas pemodelan *mixed geographically weighted regression multivariate* pada indikator kualitas air COD dan BOD di Kali Surabaya. Berdasarkan hasil pemodelan regresi lokal yang dilakukan oleh Khaulasari (2014) diperoleh kesimpulan bahwa, BOD pada pengamatan bulan Juli 2013 dipengaruhi oleh kecepatan aliran air, konsentrasi nitrat, amonia, nitrit dan deterjen, sedangkan COD dipengaruhi oleh kecepatan aliran air.

Hidayanti (2015) membahas pemodelan *bivariate Weibull regression* pada data indikator pencemaran BOD dan COD air sungai di Surabaya. Model regresi Weibull bivariat yang dibahas oleh Hidayanti (2015) tersebut dikonstruksi dari fungsi *survival* bersama distribusi Weibull bivariat yang dikembangkan oleh Lee dan Wen (2009), dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi dengan kovariat identik dan parameter regresi tidak identik. Pada penelitiannya, Hidayanti (2015) melakukan pengujian distribusi terhadap data BOD maupun data COD dan diperoleh kesimpulan, bahwa data BOD dan COD masing-masing berdistribusi Weibull univariat.

### 1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Mendapatkan penaksir parameter, statistik uji, distribusi statistik uji dan daerah kritis pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak.
2. Mendapatkan penaksir parameter model GWMWR.
3. Mendapatkan algoritma penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak dan algoritma penaksiran parameter model GWMWR.
4. Mendapatkan model GWMWR data indikator pencemaran air COD, DO dan  $PO_4$  pada air sungai di Surabaya, dan mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR indikator pencemaran air.

### 1.4. Orisinalitas Penelitian

Model regresi Weibull multivariat yang telah dikembangkan sampai saat ini adalah model regresi Weibull bivariat yang dikemukakan oleh Hanagal (2004, 2005, 2006), yang pembahasan masih terbatas pada penaksiran parameter, sedangkan pembahasan pengujian hipotesis parameter regresi masih sedikit. Model regresi Weibull bivariat yang dikemukakan oleh Hanagal (2004, 2005, 2006) tersebut merupakan pengembangan dari FKP distribusi eksponensial bivariat yang dikemukakan oleh Freund (1961) dan Marshall-Olkin (1967), dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi. Model regresi Weibull bivariat yang dikembangkan oleh Hanagal (2004, 2005, 2006) diterapkan pada data *lifetime* atau data waktu survival tersensor.

Model RWM dan GWMWR yang dibahas pada penelitian ini merupakan pengembangan dari distribusi Weibull multivariat yang dikemukakan oleh Lee dan Wen (2009), dan pengembangan model regresi Weibull bivariat yang dibahas oleh Hidayanti dkk (2015). Model RWM dan GWMWR yang dibahas pada penelitian ini dikonstruksi dari fungsi survival bersama distribusi Weibull multivariat yang dikembangkan oleh Lee dan Wen (2009), dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam parameter regresi. Metode penaksiran parameter model RWM dan GWMWR adalah MLE, dan penentuan statistik uji pada pengujian hipotesis parameter regresi kedua model regresi ini didasarkan



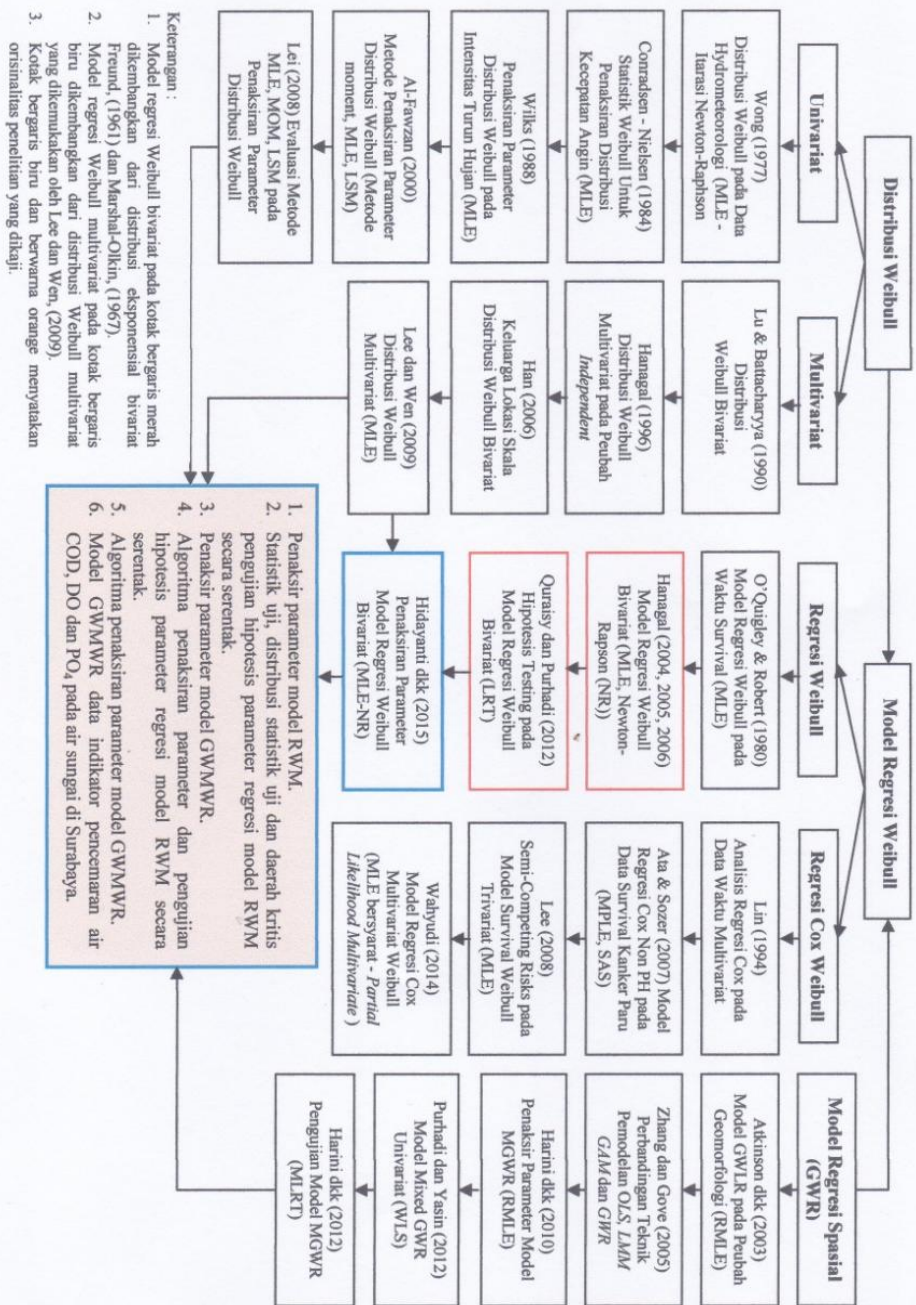
pada metode *likelihood ratio test* (LRT). Model RWM dan GWMWR pada penelitian ini diterapkan pada data kontinu non-negatif bukan data *lifetime*, diterapkan pada data lingkungan, yaitu data indikator pencemaran COD, DO dan  $PO_4$  pada air sungai di Surabaya. Melalui pemodelan GWMWR ini dapat dievaluasi faktor-faktor yang mempengaruhi FKP data indikator pencemaran air sungai, yang berguna dalam pemberian masukan atau informasi pencemaran air sungai kepada instansi terkait yang menangani permasalahan pencemaran air sungai di Surabaya.

Berdasarkan uraian di atas, maka orisinalitas penelitian ini meliputi

1. Penaksir parameter model RWM.
2. Statistik uji, distribusi statistik uji dan daerah kritis pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak.
3. Penaksir parameter model GWMWR.
4. Algoritma penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak.
5. Algoritma penaksiran parameter model GWMWR.
6. Model GWMWR data indikator pencemaran air COD, DO dan  $PO_4$  pada air sungai di Surabaya.

Orisinalitas penelitian diperjelas oleh *road map* penelitian yang disajikan pada Gambar 1.1.

Berdasarkan *road map* penelitian pada Gambar 1.1, distribusi Weibull terdiri dari distribusi Weibull univariat dan multivariat, sedangkan model regresi yang dikembangkan (dikonstruksi) dari distribusi Weibull antara lain model regresi Cox Weibull dan model regresi Weibull. Beberapa peneliti yang telah mengembangkan distribusi Weibull multivariat antara lain adalah Lu dan Bhattacharyya (1990), Hanagal (1996), Han (2006) serta Lee dan Wen (2009). Beberapa peneliti yang membahas model regresi Weibull antara lain O'Quigley dan Roberts (1980), Hanagal (2004, 2005, 2006), Quraisy dan Purhadi (2012) serta Hidayanti dkk (2015). Model regresi Weibull bivariat yang dikembangkan oleh Hanagal (2004, 2005, 2006) dikonstruksi dari FKP distribusi eksponensial bivariat yang dikemukakan oleh Freund (1961) dan Marshall-Olkin (1967).



Gambar 1.1 Road Map Penelitian

Model RWM dan GWMWR yang dibahas pada penelitian ini dikonstruksi dari fungsi *survival* bersama distribusi Weibull multivariat yang dikemukakan oleh Lee dan Wen (2009), dan merupakan pengembangan model regresi Weibull bivariat yang dikemukakan oleh Hidayanti dkk (2015). Pemodelan parameter skala pada FKP ke dalam model regresi berdasar pada model regresi Weibull bivariat yang dikembangkan oleh Hanagal (2004, 2005, 2006). Penentuan statistik uji dan distribusi statistik uji pada pengujian hipotesis parameter regresi merupakan pengembangan dari penelitian yang dilakukan oleh Quraissy dan Purhadi (2012). Peneliti sebelumnya yang membahas model GWR antara lain Atkinson dkk (2003), Zhang dkk (2005), Harini dkk (2010, 2012) serta Purhadi dan Yasin (2012). Penentuan pembobot spasial pada penaksiran parameter model GWMWR yang dibahas pada penelitian ini merujuk penelitian yang dilakukan oleh Purhadi dan Yasin (2012) dan Harini dkk (2010, 2012).

### **1.5. Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah

1. Pengembangan metode statistika pada penaksiran parameter, penentuan statistik uji, distribusi statistik uji dan daerah kritis pengujian hipotesis parameter regresi model RWM dan GWMWR.
2. Sebagai masukan bagi penentu kebijakan dalam pencegahan pencemaran dan pengendalian kualitas air sungai di Surabaya, yang didasarkan pada hasil analisis terhadap faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap model RWM dan GWMWR data indikator pencemaran air COD, DO dan  $PO_4$  pada air sungai di Surabaya.

### **1.6. Batasan Masalah**

Penerapan model GWMWR dibatasi pada data trivariat, yaitu data indikator pencemaran COD, DO dan  $PO_4$  pada air sungai di Surabaya tahun 2013. Sampel penelitian dibatasi badan air atau sungai di Surabaya yang mengalir pada satu aliran. Unsur spasial yang digunakan penelitian ini adalah unsur spasial tipe titik, dimana koordinat lokasi titik pengamatan dinyatakan dalam pasangan letak lintang (*latitude*) dan letak bujur (*longitude*).

Fungsi pembobot yang digunakan dalam penentuan bobot spasial pada penaksiran parameter model GWMWR adalah fungsi Gauss adaptif, *bi-square* adaptif dan *tricube* adaptif, dimana *bandwidth* adaptif optimal ditentukan menggunakan kriteria *Bayesian Information Criterion* (BIC). Model GWMWR indikator pencemaran air sungai di Surabaya terbaik dipilih dari hasil-hasil penaksiran parameter yang menggunakan ketiga fungsi pembobot spasial tersebut, yang memberikan nilai BIC minimum. Penaksiran parameter model GWMWR dilakukan pada setiap lokasi pengamatan dan diasumsikan model GWMWR (model lokal) tidak identik dengan model RWM (model global).

### **1.7. Sistematika Penulisan**

Disertasi ini perlu dibuat suatu sistematika agar struktur penulisan tersusun dengan baik. Sistematika penulisan disertasi ini adalah sebagai berikut : Pendahuluan dituangkan pada bab 1, landasan teori dibahas pada bab 2, metode penelitian diuraikan pada bab 3. Kajian teoritis model RWM yang meliputi penaksiran parameter, algoritma penaksiran parameter, pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak dan algoritma pengujian hipotesis disajikan pada bab 4, kajian teoritis model GWMWR yang terdiri dari model umum, penaksiran parameter dan algoritma penaksiran parameter disajikan pada bab 5. Penerapan model GWMWR pada data indikator pencemaran air sungai di Surabaya dibahas pada bab 6, dan penutup penelitian yang membahas kesimpulan penelitian maupun saran berdasarkan temuan penelitian dituangkan pada bab 7.

## BAB 2

### LANDASAN TEORI

Bab ini membahas teori-teori yang mendasari model regresi Weibull multivariat (RWM) dan model *geographically weighted multivariate Weibull regression* (GWMWR), yang meliputi distribusi Weibull, model regresi Weibull univariat dan model *geographically weighted univariate Weibull regression*. Pembahasan selanjutnya adalah pembobot spasial model GWR, beberapa definisi dan teorema dasar, sifat asimtotik penaksir *maximum likelihood*, pengujian distribusi, pengujian multikolinieritas dan pengujian heterogenitas spasial. Bagian akhir bab ini membahas indikator pencemaran air COD, DO dan fosfat (PO<sub>4</sub>).

#### 2.1. Distribusi Weibull

Pembahasan distribusi Weibull meliputi distribusi Weibull univariat dan multivariat. Bagian awal sub-bab ini membahas distribusi Weibull univariat sebagai materi pengantar pembahasan distribusi Weibull multivariat. Pembahasan distribusi Weibull univariat meliputi fungsi kepadatan peluang (FKP), fungsi distribusi kumulatif (FDK), fungsi-fungsi lain yang saling berhubungan pada distribusi Weibull dan penaksiran parameter FKP. Penaksiran parameter FKP difokuskan pada FKP versi skala-bentuk distribusi Weibull univariat. Bagian akhir sub-bab ini membahas distribusi Weibull multivariat yang dikembangkan oleh Lee dan Wen (2009).

##### 2.1.1. Distribusi Weibull Univariat

Suatu peubah acak kontinu non-negatif  $Y$  berdistribusi dengan FKP  $f(y)$  yang diberikan oleh

$$f_Y(y | \delta, \eta, \gamma) = \frac{\gamma}{\eta} \left( \frac{y - \delta}{\eta} \right)^{\gamma-1} \exp \left[ - \left( \frac{y - \delta}{\eta} \right)^\gamma \right], \quad y \geq \delta; \delta, \gamma, \eta \in \mathbb{R}^+ \quad (2.1)$$

adalah peubah acak berdistribusi Weibull tiga parameter (Rinne, 2009). Parameter-parameter  $\delta$ ,  $\gamma$  dan  $\eta$  pada persamaan (2.1) berturut-turut adalah parameter lokasi (*location*), parameter bentuk (*shape*) dan parameter skala (*scale*),

dengan  $\mathbb{R}^+$  menyatakan bilangan riil positif. Pengesetan parameter  $\delta=0$  pada persamaan (2.1) diperoleh FKP peubah acak  $Y$  yang berdistribusi Weibull dua parameter versi skala-bentuk (*scale-shape*), yaitu

$$f_Y(y|\eta, \gamma) = \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{y}{\eta}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\eta}\right)^\gamma\right], \quad y \geq 0; \quad \gamma, \eta \in \mathbb{R}^+. \quad (2.2)$$

FDK dan fungsi *survival* distribusi Weibull dapat diperoleh dari FKP pada persamaan (2.2), dan masing-masing dapat ditulis sebagai berikut

$$S(y) = P(Y > y) = \int_y^\infty f_X(t|\eta, \gamma) dt = \exp\left[-\left(\frac{y}{\eta}\right)^\gamma\right], \quad (2.3)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y f_X(t|\eta, \gamma) dt = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\eta}\right)^\gamma\right], \quad (2.4)$$

sedangkan fungsi *hazard* Weibull adalah

$$h_Y(y) = \frac{f_Y(y|\eta, \gamma)}{S_Y(y|\eta, \gamma)} = \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{y}{\eta}\right)^{\gamma-1}. \quad (2.5)$$

Berdasarkan persamaan (2.3), FDK yang diberikan oleh persamaan (2.4) dapat dinyatakan dalam fungsi *survival*, yaitu

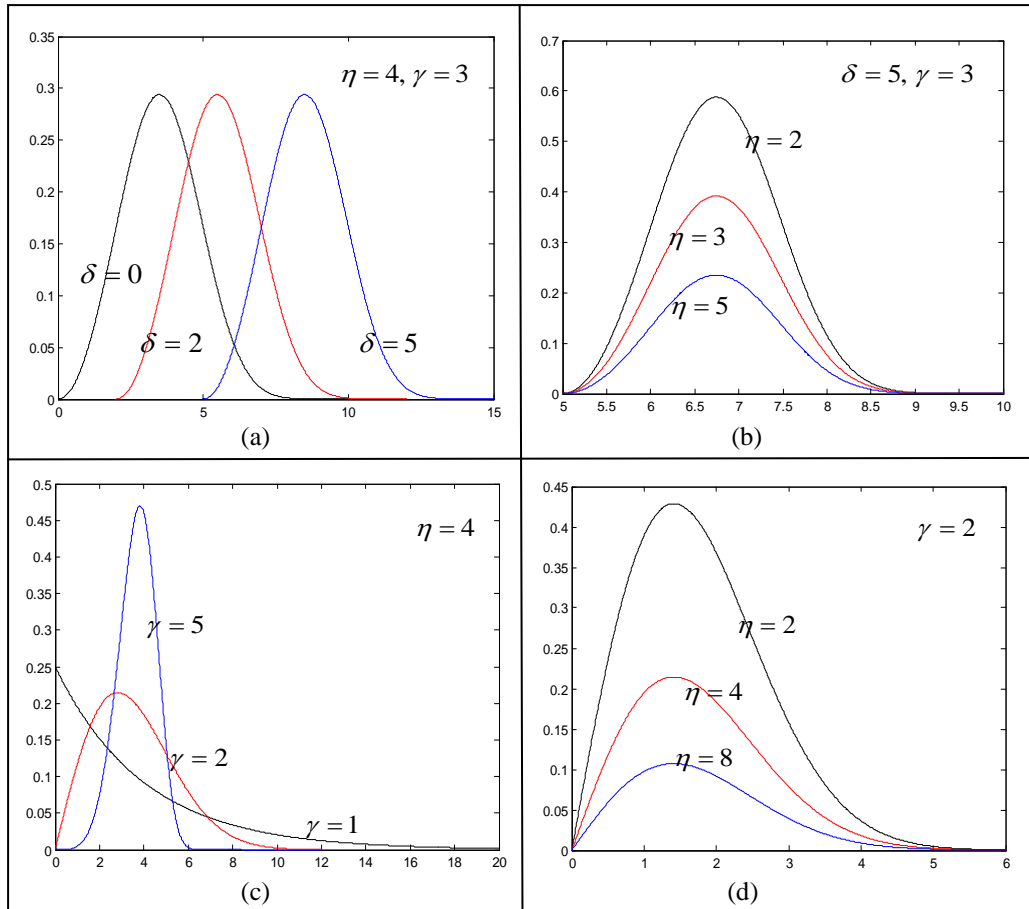
$$F_Y(y) = 1 - S_Y(y), \quad (2.6)$$

dan dengan melakukan diferensiasi pada kedua ruas persamaan (2.6) diperoleh FKP distribusi Weibull, yaitu

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = -\frac{dS_Y(y)}{dy}.$$

Penulisan FKP, FDK dan fungsi *survival* pada bahasan selanjutnya tidak mencantumkan indeks  $Y$ , sedangkan penulisan fungsi *hazard* mencantumkan indeks  $Y$ .

Grafik FKP distribusi Weibull univariat disajikan pada Gambar 2.1. Gambar 2.1 (a) dan (b) adalah grafik FKP distribusi Weibull tiga parameter pada persamaan (2.1), sedangkan Gambar 2.1 (c) dan (d) adalah grafik FKP distribusi Weibull versi skala-bentuk pada persamaan (2.2). Berdasarkan Gambar 2.1 (a), grafik FKP bergeser kekanan bila nilai parameter lokasi ( $\delta$ ) semakin besar dengan nilai parameter skala dan bentuk konstan.



Gambar 2.1 Grafik FKP Distribusi Weibull Univariat : (a), (b) adalah grafik FKP (2.1) dan (c),(d) adalah grafik FKP (2.2).

Gambar 2.1 (b) menunjukkan nilai FKP semakin besar jika nilai parameter skala ( $\eta$ ) semakin kecil, dengan nilai parameter lokasi dan bentuk konstan. Gambar 2.1 (c) menunjukkan bentuk grafik FKP berubah bila nilai parameter bentuk ( $\gamma$ ) diubah dengan nilai parameter skala konstan, sedangkan Gambar 2.1 (d) menunjukkan nilai FKP semakin besar jika nilai parameter skala ( $\eta$ ) semakin kecil dengan nilai parameter bentuk konstan.

Penaksiran parameter distribusi Weibull merupakan bahasan yang menarik dan merupakan topik yang paling banyak dibahas pada penelitian. Beberapa metode penaksiran parameter antara lain metode *least squares*, metode momen dan metode MLE (Lei, 2008). Penaksiran parameter yang dibahas pada sub-bab ini dibatasi penaksiran parameter distribusi Weibull versi skala-bentuk dengan FKP diberikan oleh persamaan (2.2) menggunakan metode MLE.

Metode MLE merupakan salah satu metode penaksiran parameter suatu distribusi dengan cara memaksimumkan fungsi *likelihood*. Metode MLE merupakan metode yang paling populer untuk penaksiran parameter dibanding dengan metode yang lain, karena penaksir *maximum likelihood* (ML) mempunyai sifat asimtotik, yakni konsisten, tidak bias pada sampel besar, berdistribusi normal asimtotik, efisien dan bersifat invarian (Rinne, 2009). Misalkan  $Y_i \sim W(\eta, \gamma)$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah sampel acak dari distribusi Weibull versi skala-bentuk dengan FKP diberikan pada persamaan (2.2), maka fungsi *likelihood* didefinisikan

$$\mathcal{L}(\eta, \gamma) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \eta, \gamma) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\gamma}{\eta} \left( \frac{y_i}{\eta} \right)^{\gamma-1} \exp \left[ - \left( \frac{y_i}{\eta} \right)^{\gamma} \right] \right), \quad (2.7)$$

dan logaritma natural fungsi *likelihood* (2.7) adalah

$$L(\eta, \gamma) = \ln \mathcal{L}(\eta, \gamma) = \sum_{i=1}^n \left( \ln \gamma - \gamma \ln \eta + (\gamma - 1) \ln y_i - \left( \frac{y_i}{\eta} \right)^{\gamma} \right). \quad (2.8)$$

Penaksir ML parameter distribusi Weibull adalah harga-harga  $\hat{\eta}$  dan  $\hat{\gamma}$  yang memaksimumkan fungsi (2.7) dan juga memaksimumkan fungsi (2.8) yang diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood*

$$\frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \eta} & \frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \gamma} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

dengan  $\boldsymbol{\phi} = [\eta \quad \gamma]^T$  dan  $\mathbf{0}$  adalah vektor nol berdimensi 2. Vektor

$$\frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \eta} & \frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \gamma} \end{bmatrix}^T$$

pada ruas kiri persamaan (2.9) adalah vektor gradien, yaitu vektor turunan parsial orde pertama dari fungsi  $L(\eta, \gamma)$  terhadap parameter  $\eta$  dan  $\gamma$ . Turunan parsial orde pertama fungsi *log-likelihood* (2.8) terhadap  $\eta$  dan  $\gamma$  masing-masing setelah disederhanakan adalah

$$\frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma}{\eta} \left( \left( \frac{y_i}{\eta} \right)^{\gamma} - 1 \right)$$

dan

$$\frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma} + \left( 1 - \left( \frac{y_i}{\eta} \right)^{\gamma} \right) \ln \left( \frac{y_i}{\eta} \right). \quad (2.10)$$



Berdasarkan persamaan (2.10), persamaan *likelihood* (2.9) tidak *closed form*, yakni tidak dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit, sehingga solusi sistem persamaan (2.9) untuk mendapatkan penaksir ML eksak tidak dapat ditemukan secara analitikal. Alternatif untuk mendapatkan solusi sistem persamaan (2.9) adalah melalui pendekatan numerik yaitu dengan metode iterasi Newton-Raphson. Penaksir ML dihampiri oleh akar-akar sistem persamaan (2.9) yang didapatkan melalui iterasi Newton-Raphson, yaitu

$$\boldsymbol{\varphi}^{(q^*+1)} = \boldsymbol{\varphi}^{(q^*)} - \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}^{(q^*)})\mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi}^{(q^*)}), \text{ untuk } q^* = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

(Khuri, 2003).  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi})$  pada persamaan (2.11) adalah vektor gradien yang komponen-komponennya adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi}) &= \frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \eta} & \frac{\partial L(\eta, \gamma)}{\partial \gamma} \end{bmatrix}^T \text{ dan} \\ \mathbf{H}(\boldsymbol{\varphi}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\eta, \gamma)}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 L(\eta, \gamma)}{\partial \eta \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 L(\eta, \gamma)}{\partial \gamma \partial \eta} & \frac{\partial^2 L(\eta, \gamma)}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

adalah matriks Hessian. Matriks Hessian adalah matriks simetri yang merupakan matriks turunan parsial orde kedua dari  $L(\eta, \gamma)$  terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor  $\boldsymbol{\varphi}$ . Elemen-elemen matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\varphi})$  pada persamaan (2.12) dapat dirangkum sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 L(\eta, \gamma)}{\partial \eta^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma}{\eta^2} \left[ 1 - \left( \frac{y_i}{\eta} \right)^\gamma \right] - \left( \frac{\gamma}{\eta} \right)^2 \left( \frac{y_i}{\eta} \right)^\gamma,$$

$$\frac{\partial^2 L(\eta, \gamma)}{\partial \gamma^2} = \sum_{i=1}^n \left( -\frac{1}{\gamma^2} - \left( \frac{y_i}{\eta} \right)^\gamma \left[ \ln \left( \frac{y_i}{\eta} \right) \right]^2 \right)$$

dan

$$\frac{\partial^2 L(\eta, \gamma)}{\partial \eta \partial \gamma} = \frac{\partial^2 L(\eta, \gamma)}{\partial \gamma \partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta} \left[ \left( \frac{y_i}{\eta} \right)^\gamma - 1 \right] + \frac{\gamma}{\eta} \left[ \left( \frac{y_i}{\eta} \right)^\gamma \ln \left( \frac{y_i}{\eta} \right) \right].$$

Proses iterasi dimulai dari nilai awal  $\boldsymbol{\varphi}^{(0)}$  dan iterasi berhenti pada iterasi ke- $q^*+1$ , jika  $\|\boldsymbol{\varphi}^{(q^*+1)} - \boldsymbol{\varphi}^{(q^*)}\| \leq \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  adalah bilangan riil positif yang cukup

kecil, dan penaksir ML dari parameter  $\boldsymbol{\phi}$  adalah  $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}^{(q^*)}$ .

FKP distribusi Weibull versi skala-bentuk pada persamaan (2.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$f(y) = \gamma \lambda y^{\gamma-1} \exp[-\lambda y^\gamma], \quad y \geq 0; \gamma, \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad (2.13)$$

dengan fungsi *survival* dan fungsi *hazard* berturut-turut adalah

$$S(y) = \exp[-\lambda y^\gamma] \quad \text{dan} \quad h(y) = \gamma \lambda y^{\gamma-1}.$$

### 2.1.2. Distribusi Weibull Multivariat

FKP bersama suatu vektor acak koninu non-negatif  $[Y_1 Y_2 \cdots Y_m]^T$  berdistribusi Weibull multivariat telah dikembangkan oleh Lee dan Wen (2009), dan dinyatakan dalam persamaan (2.14) berikut

$$f_1(y_1, y_2, \dots, y_m) = \left( \prod_{k=1}^m \left( \frac{1}{a} \right) \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}-1} \right) \exp[-A^a] \times \left( \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A^{\ell a - m} \right), \quad 0 < a \leq 1; y_k \geq 0; 0 < \gamma_k < \infty; 0 < \lambda_k < \infty, \quad (2.14)$$

dengan  $A = \sum_{k=1}^m \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}$ . Parameter  $a$  pada persamaan (2.14) menyatakan ukuran

derajat *dependence* pada hubungan  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ ;  $\gamma_k$  dan  $\lambda_k$  untuk  $k = 1, 2, \dots, m$  masing-masing menyatakan parameter bentuk dan parameter skala. Berdasarkan persamaan (2.14), untuk  $a = 0$  menyatakan ukuran korelasi (*dependence*) positif maksimum dan untuk  $a = 1$  menyatakan ukuran saling bebas (*independence*).

$C(m, \ell, a)$  pada persamaan (2.14) adalah koefisien faktorial tergeneralisir yang didefinisikan oleh

$$C(m, \ell, a) = \sum_{\substack{\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m = \ell \\ \ell_1 + 2\ell_2 + \dots + m\ell_m = m \\ \ell_k \in \text{bulat non-negatif}}} P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}^m \prod_{k=1}^m \binom{a}{k}^{\ell_k}, \quad (2.15)$$

untuk semua bilangan bulat positif  $m, \ell$ , dengan  $\ell \leq m$  dan  $a$  adalah bilangan riil.

$P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}^m$  pada persamaan (2.15) didefinisikan oleh

$$P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}^m = \binom{m}{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m} = \frac{m!}{\ell_1! \ell_2! \dots \ell_m!},$$

dimana  $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m\}$  adalah himpunan bilangan bulat non-negatif, solusi dari sistem persamaan  $\sum_{k=1}^m \ell_k = \ell$  dan  $\sum_{k=1}^m k \ell_k = m$ . Jumlahan (notasi sigma) untuk penentuan  $C(m, \ell, a)$  pada persamaan (2.15) dijalankan melalui semua bilangan bulat non-negatif yang merupakan solusi dari sistem persamaan  $\sum_{k=1}^m \ell_k = \ell$  dan  $\sum_{k=1}^m k \ell_k = m$  (Lee dan Wen, 2009; Wahyudi dkk, 2011).

FKP yang dikembangkan oleh Lee dan Wen, (2009) pada persamaan (2.14) tersebut dapat diturunkan dari fungsi *survival* distribusi Weibull multivariat yang diberikan oleh

$$S(y_1, y_2, \dots, y_m) = \exp[-A^a], \quad (2.16)$$

melalui hubungan

$$f(y_1, y_2, \dots, y_m) = \frac{\partial^m F(y_1, \dots, y_m)}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_m} = (-1)^m \frac{\partial^m S(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_m}, \quad (2.17)$$

dengan  $A$  didefinisikan pada persamaan (2.14). Hubungan antara FDK dan fungsi *survival* bersama distribusi Weibull multivariat (2.18) adalah

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2, \dots, y_m) &= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^m (Y_k \leq y_k)\right)^c = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^m (Y_k > y_k)\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^m S(y_k) + \sum_{k_1 < k_2}^m S(y_{k_1}, y_{k_2}) - \\ &\quad \sum_{k_1 < k_2 < k_3}^m S(y_{k_1}, y_{k_2}, y_{k_3}) + \dots + (-1)^m S(y_1, \dots, y_m), \end{aligned} \quad (2.18)$$

(Bhat, 1981), dimana fungsi distribusi kumulatif  $F(y_1, \dots, y_m)$  dan fungsi *survival*  $S(y_1, \dots, y_m)$  masing-masing didefinisikan oleh

$$F(y_1, \dots, y_m) = P\left(\bigcap_{k=1}^m (Y_k \leq y_k)\right) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_m \leq y_m)$$

dan

$$S(y_1, \dots, y_m) = P\left(\bigcap_{k=1}^m (Y_k > y_k)\right) = P(Y_1 > y_1, Y_2 > y_2, \dots, Y_m > y_m) \quad (\text{Lawless, 2003}).$$

Ekspektasi (*mean*) dan variansi dari peubah acak berdistribusi Weibull multivariat dapat diperoleh melalui momen. Momen umum dari peubah acak  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  berdistribusi Weibull multivariat dengan FKP bersama disajikan pada persamaan (2.14) adalah

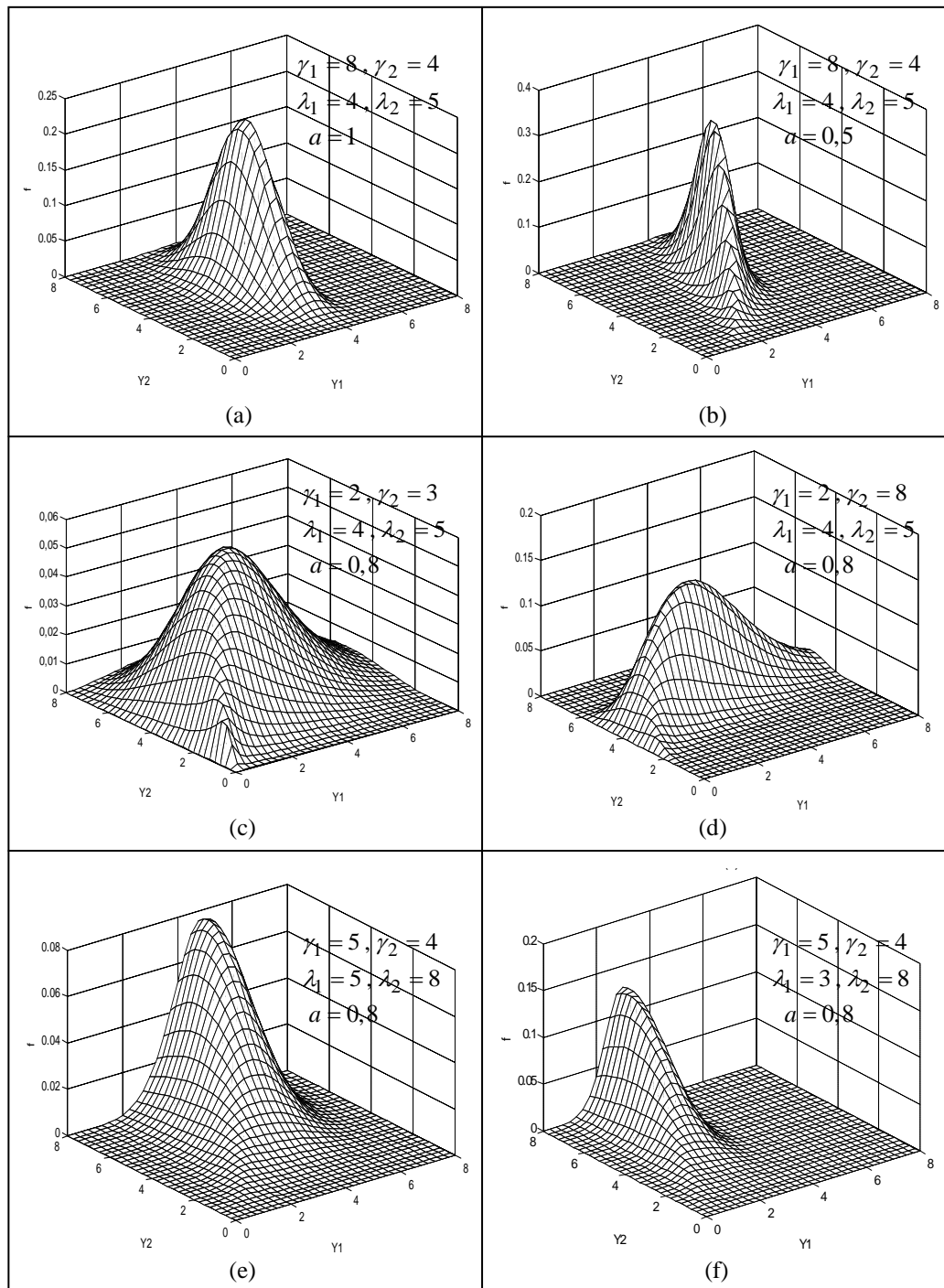
$$E(Y_1^{n_1} Y_2^{n_2} \dots Y_m^{n_m}) = \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_m^{n_m} \Gamma\left(\frac{n_1 a}{\gamma_1} + 1\right) \dots \Gamma\left(\frac{n_m a}{\gamma_m} + 1\right) \Gamma\left[\left(\frac{n_1}{\gamma_1} + \dots + \frac{n_m}{\gamma_m}\right) + 1\right]}{\Gamma\left[a\left(\frac{n_1}{\gamma_1} + \frac{n_2}{\gamma_2} + \dots + \frac{n_m}{\gamma_m}\right) + 1\right]}, \quad (2.19)$$

(Lee dkk, 2009), dengan  $n_k$  untuk  $k=1, 2, \dots, m$  adalah bilangan bulat non-negatif,  $\lambda_k, \gamma_k$  untuk  $k=1, 2, \dots, m$  masing-masing adalah parameter skala dan bentuk, serta  $\Gamma(\cdot)$  adalah fungsi gamma. Momen umum yang dikemukakan oleh Lee dan Wen (2009) tersebut merupakan pengembangan momen peubah acak distribusi Weibull bivariat yang dikemukakan oleh Lu dan Bhattacharyya, (1990). Berdasarkan momen tersebut selain dapat ditentukan *mean* dan variansi, juga dapat ditentukan kovariansi dan korelasi dari setiap pasang peubah acak. Melalui momen peubah acak distribusi Weibull bivariat, Lu dan Bhattacharyya, (1990) telah menunjukkan bahwa korelasi setiap pasangan peubah acak berdistribusi Weibull multivariat adalah bilangan non-negatif.

Berdasarkan FKP bersama yang diberikan oleh persamaan (2.14), untuk  $m=2$  diperoleh FKP bersama distribusi Weibull bivariat  $f(y_1, y_2)$ , yaitu

$$f(y_1, y_2) = \left(\frac{-1}{a}\right)^2 \left(\frac{\gamma_1}{\lambda_1}\right) \left(\frac{\gamma_2}{\lambda_2}\right) \left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{a}-1} \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\frac{\gamma_2}{a}-1} \exp\left\{-\left[\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{a}} + \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\frac{\gamma_2}{a}}\right]^a\right\} \times \left[-a(a-1) \left[\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{a}} + \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\frac{\gamma_2}{a}}\right]^{a-2} + a^2 \left[\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{a}} + \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\frac{\gamma_2}{a}}\right]^{2a-2}\right]. \quad (2.20)$$

Grafik permukaan (*surface*) FKP bersama distribusi Weibull bivariat (2.20), dengan nilai-nilai parameter yang berbeda dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Grafik Permukaan FKP Distribusi Weibull Bivariat (2.20), dengan Nilai-nilai Parameter Berbeda

Gambar 2.2 (a) dan (b) menunjukkan bahwa, semakin kecil nilai parameter ukuran derajat *dependence*  $a$  dengan nilai parameter yang lain tetap, maka puncak

*surface* FKP semakin tinggi. Gambar 2.2. (c) dan (d) menunjukkan semakin besar nilai parameter bentuk  $\gamma$  dengan nilai parameter yang lain tetap, maka puncak *surface* FKP semakin tinggi, dan Gambar 2.2 (e), (f) menunjukkan semakin kecil nilai parameter skala  $\lambda$  dengan nilai parameter yang lain tetap maka puncak *surface* FKP semakin tinggi.

Similar dengan FKP distribusi Weibull bivariat yang diberikan oleh persamaan (2.20), berdasarkan FKP distribusi Weibull multivariat (2.14) untuk  $m = 3$  didapat FKP bersama distribusi Weibull trivariat, yaitu

$$f(y_1, y_2, y_3) = \left( \prod_{k=1}^3 \left( \frac{1}{a} \right) \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}-1} \right) A_1^{a-3} Q_3^* \exp[-A_1^a], \quad (2.21)$$

dengan  $Q_3 = a(a-1)(a-2) - 3a^2(a-1)A_1^a + a^3A_1^{2a}$  dan  $A_1 = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}$ . Penaksiran

parameter FKP bersama distribusi Weibull trivariat (2.21) menggunakan metode MLE, yaitu penaksir parameter yang diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*. Diketahui bahwa FKP (2.21) mempunyai tujuh buah parameter yang dapat dinyatakan dalam vektor yaitu  $\theta_1 = [a \ \lambda^T \ \gamma^T]^T$ , dengan  $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$  dan  $\gamma = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3]^T$ .

Misalkan,  $(Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{mi})$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah sampel acak berukuran  $n$  yang saling bebas dari suatu populasi yang berdistribusi Weibull trivariat dengan FKP diberikan pada persamaan (2.21), maka fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta_1 | \mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^n f(\theta_1 | \mathbf{y}_i) \\ &= \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^3 \left( \frac{1}{a} \right) \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}-1} \right) \right) \left( \prod_{i=1}^n A_{1i}^{a-3} \right) \times \\ &\quad \left( \prod_{i=1}^n \exp[-A_{1i}^a] \right) \left( \prod_{i=1}^n Q_{3i} \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

dengan  $Q_{3i} = a(a-1)(a-2) - 3a^2(a-1)A_{1i}^a + a^3A_{1i}^{2a}$  dan  $A_{1i} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right)^{\gamma_k/a}$ .

Penaksir ML adalah  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = [\hat{a} \ \hat{\lambda}^T \ \hat{\gamma}^T]^T$  yang memaksimumkan fungsi *likelihood* (2.22), dan juga memaksimumkan logaritma natural fungsi *likelihood*. Dengan menerapkan logaritma natural pada kedua ruas persamaan (2.22), diperoleh fungsi *log-likelihood* yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$L(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y}), \quad (2.23)$$

dengan

$$L(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y}) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y}),$$

dan

$$L_1(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 (\ln \gamma_k - \ln a - \ln \lambda_k + (\frac{\gamma_k}{a} - 1)(\ln y_{ki} - \ln \lambda_k));$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (a - 3) \ln A_{1i};$$

$$L_3(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y}) = - \sum_{i=1}^n A_{1i}^a$$

dan

$$L_4(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \ln Q_{3i}$$

Berdasarkan persamaan (2.23), penaksir ML parameter FKP distribusi Weibull trivariat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood*

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

dengan

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = \left[ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial a} \ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \lambda_1} \ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \lambda_2} \ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \lambda_3} \ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \gamma_1} \ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \gamma_2} \ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \gamma_3} \right]^T$$

adalah vektor gradien. Berdasarkan persamaan (2.23), persamaan *likelihood* (2.24) tidak *closed form*, sehingga solusi eksak dari persamaan *likelihood* untuk mendapatkan penaksir ML parameter FKP distribusi Weibull trivariat tidak dapat diperoleh secara analitikal. Metode alternatif untuk menentukan solusi persamaan *likelihood* (2.24) adalah melalui pendekatan numerik, yaitu metode iteratif Newton-Raphson. Penaksir parameter FKP distribusi Weibull trivariat dihipotesiskan

oleh akar-akar persamaan *likelihood* (2.24) yang diperoleh secara iteratif dengan algoritma Newton-Raphson, yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q^{*}+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q^{*})} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q^{*})}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q^{*})}), \quad q^{*} = 0, 1, 2, \dots,$$

dengan

$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_1) = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1}$  adalah vektor gradien dan  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1)$  adalah matriks Hessian yang

mempunyai bentuk umum

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial a \partial \boldsymbol{\lambda}^T} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial a \partial \boldsymbol{\gamma}^T} \\ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial a} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \boldsymbol{\lambda}^T} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} \\ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial a} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\lambda}^T} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan fungsi *log-likelihood* pada persamaan (2.23), komponen-komponen vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_1)$  dapat diperoleh melalui format

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_1) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}_1},$$

dan elemen-elemen matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1)$  dapat dihitung dengan format

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}_1 \partial \boldsymbol{\theta}_1^T}.$$

Khusus untuk vektor  $\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}_1)$  dan matriks simetri  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}_1)$ , berdasarkan persamaan (2.23), bahwa komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}_1)$  dan elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}_1)$  masing-masing dapat diperoleh berdasarkan hasil penurunan parsial orde pertama dan kedua dari fungsi  $Q$  terhadap komponen-komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_1$ . Komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}_1)$  dapat diperoleh menggunakan formula

$$\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}_1) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} \right],$$

dan elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}_1)$  dapat diperoleh menggunakan formula

$$\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}_1) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i^2} \left( \left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_1 \partial \boldsymbol{\theta}_1^T} \right] Q_i - \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} \right] \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_1^T} \right] \right).$$



Turunan-turunan parsial orde pertama dan kedua fungsi (2.23) terhadap semua komponen vektor  $\theta_1$  untuk mendapatkan komponen-komponen vektor gradien  $g(\theta_1)$  dan elemen-elemen matriks Hessian  $H(\theta_1)$  disajikan pada Lampiran 11.

## 2.2. Model Regresi Weibull Univariat

Sub-bab ini membahas model regresi Weibull univariat (RWU), yang meliputi penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi. Model regresi Weibull univariat adalah model regresi yang dikembangkan dari FKP distribusi Weibull univariat dengan parameter skala dinyatakan dalam model regresi. Parameter skala ( $\lambda$ ) pada FKP (2.13) dapat dinyatakan dalam model regresi, yakni

$$\lambda(\mathbf{x}) = \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}] , \quad (2.25)$$

dengan  $\mathbf{x} = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_p]^T$  dan  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_p]^T$ . Dengan melakukan substitusi persamaan (2.25) kedalam persamaan (2.13) diperoleh FKP baru dengan parameter skala dinyatakan dalam parameter regresi, yaitu

$$f(y) = \gamma y^{\gamma-1} \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}] \exp\{-y^\gamma \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}]\} , \quad (2.26)$$

dan selanjutnya persamaan (2.26) dinamakan model regresi Weibull univariat (O'Quigley dan Roberts, 1980).

Penaksiran parameter model regresi Weibull univariat dapat menggunakan metode MLE. Tahap awal metode MLE adalah mendefinisikan fungsi *likelihood*. Misalkan diambil  $n$  sampel acak  $Y_i \sim W(\lambda, \gamma)$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  dan parameter skala dinyatakan dalam fungsi dari kovariat yang memenuhi hubungan (2.25), dengan  $\mathbf{x}_i = [X_{1i} \ X_{2i} \ \cdots \ X_{pi}]^T$  dan  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_p]^T$ . Fungsi *likelihood* berdasarkan FKP (2.26) adalah

$$\mathcal{L}(\gamma, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n f(y_i) . \quad (2.27)$$

Pembobotan untuk data yang dikelompokkan adalah

$$Z_i^* = \begin{cases} 1, & \text{jika } y \leq y^* \\ 0, & \text{jika } y > y^*, \end{cases}$$

dengan  $y^*$  adalah nilai peubah respon yang ditentukan.

Logaritma natural fungsi *likelihood* (2.27) untuk data yang dikelompokkan adalah

$$\begin{aligned} L(\gamma, \boldsymbol{\beta}) &= \ln \mathcal{L}(\gamma, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n Z_i^* \ln f(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n Z_i^* \ln(\gamma y_i^{\gamma-1} \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] \exp\{-y_i^\gamma \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]\}). \end{aligned}$$

Logaritma natural dari fungsi *likelihood* (2.27) untuk data yang tidak dikelompokkan adalah

$$\begin{aligned} L(\gamma, \boldsymbol{\beta}) &= \ln \mathcal{L}(\gamma, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \ln f(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \{\ln \gamma + (\gamma-1) \ln y_i + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i - y_i^\gamma \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Turunan parsial orde pertama fungsi (2.28) masing-masing adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\gamma, \boldsymbol{\beta})}{\partial \gamma} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\gamma} + \ln y_i - y_i^\gamma \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] (\ln y_i) \right\}, \\ \frac{\partial L(\gamma, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \sum_{i=1}^n \{\mathbf{x}_i - y_i^\gamma \mathbf{x}_i \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]\}, \end{aligned}$$

dan turunan parsial orde kedua fungsi (2.28) masing-masing adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(\gamma, \boldsymbol{\beta})}{\partial \gamma^2} &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\gamma^2} - y_i^\gamma \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] (\ln y_i)^2 \right\} \\ \frac{\partial^2 L(\gamma, \boldsymbol{\beta})}{\partial \gamma \partial \boldsymbol{\beta}^T} &= \sum_{i=1}^n \{-y_i^\gamma \mathbf{x}_i^T \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] (\ln y_i)\} \\ \frac{\partial^2 L(\gamma, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} &= \sum_{i=1}^n \{-y_i^\gamma \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]\}. \end{aligned}$$

Penaksir parameter model regresi Weibull univariat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood*  $\partial L / \partial \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ , dan diselesaikan dengan iterasi Newton-Raphson

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}) \text{ untuk } q^* = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

dengan

$$\boldsymbol{\theta} = [\gamma \ \boldsymbol{\beta}^T]^T, \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p]^T, \quad \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial l}{\partial \gamma} \ \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right]^T \text{ dan } \mathbf{H} \text{ adalah matriks}$$

Hessian berukuran  $(p+1) \times (p+1)$ , yaitu

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\gamma, \boldsymbol{\beta})}{\partial \gamma^2} & \frac{\partial^2 L(\gamma, \boldsymbol{\beta})}{\partial \gamma \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 L(\gamma, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \gamma} & \frac{\partial^2 L(\gamma, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}.$$

Tahapan analisis selanjutnya setelah penaksiran parameter adalah pengujian hipotesis parameter model regresi Weibull univariat, yang meliputi pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak dan parsial. Tahapan pengujian parameter regresi secara serentak adalah sebagai berikut :

Menetapkan rumusan hipotesis :

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

$$H_1 : \text{Paling sedikit ada satu } \beta_h \neq 0 \text{ untuk } h = 1, 2, \dots, p.$$

Mendefinisikan himpunan parameter di bawah  $H_0$  :

Himpunan parameter di bawah  $H_0$  adalah  $\omega = \{\gamma\}$  dan maksimum fungsi *likelihood* dibawah  $H_0$  adalah

$$\mathcal{L}(\hat{\omega}) = \max_{\omega} \mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\hat{\gamma}) = \prod_{i=1}^n \hat{\gamma} y_i^{\hat{\gamma}-1} \exp[-y_i^{\hat{\gamma}}],$$

dengan  $\hat{\gamma}$  adalah penaksir parameter  $\gamma$  yang ditentukan dengan metode MLE dengan fungsi *likelihood* dan *log-likelihood* masing-masing adalah

$$\mathcal{L}(\omega) = \left( \prod_{i=1}^n \gamma y_i^{\gamma-1} \right) \exp\left[-\sum_{i=1}^n y_i^{\gamma}\right] \text{ dan}$$

$$L(\omega) = \ln \mathcal{L}(\omega) = n \ln \gamma + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \ln y_i - \sum_{i=1}^n y_i^{\gamma}.$$

Turunan parsial orde pertama dan kedua fungsi *log-likelihood* masing-masing adalah

$$\frac{\partial L(\omega)}{\partial \gamma} = g(\gamma) = \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \ln y_i - \sum_{i=1}^n y_i^{\gamma} \ln y_i = 0$$

$$\frac{\partial^2 L(\omega)}{\partial \gamma^2} = g'(\gamma) = -\frac{n}{\gamma^2} - \sum_{i=1}^n y_i^{\gamma} (\ln y_i)^2.$$

Penaksir parameter  $\hat{\gamma}$  didapat melalui iterasi  $\hat{\gamma}^{(q^{*}+1)} = \hat{\gamma}^{(q^{*})} - \frac{g(\hat{\gamma}^{(q^{*})})}{g'(\hat{\gamma}^{(q^{*})})}$ . Iterasi

berhenti, jika

$|\hat{g}^{(q^{*}+1)} - \hat{g}^{(q^{*})}| < \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  adalah bilangan positif cukup kecil.

Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi :

Himpunan parameter di bawah populasi adalah  $\Omega = \{\gamma, \beta^T\}$  dan maksimum fungsi *likelihood* dibawah populasi adalah

$$\mathcal{L}(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} \mathcal{L}(\gamma, \beta) = \mathcal{L}(\hat{\gamma}, \hat{\beta}) = \prod_{i=1}^n \hat{\gamma} y_i^{\hat{\gamma}-1} \exp[\hat{\beta}^T \mathbf{x}_i] \exp\{-y_i^{\hat{\gamma}} \exp[\hat{\beta}^T \mathbf{x}_i]\}$$

$$\mathcal{L}(\hat{\Omega}) = \left( \prod_{i=1}^n \hat{\gamma} y_i^{\hat{\gamma}-1} \exp[\hat{\beta}^T \mathbf{x}_i] \right) \left( \exp\{-\exp[\hat{\beta}^T \mathbf{x}_i] \sum_{i=1}^n y_i^{\hat{\gamma}}\} \right),$$

dengan penaksir parameter  $\hat{\gamma}$  dan  $\hat{\beta}$  telah ditentukan melalui iterasi (2.29).

Statistik uji :

Statistik uji pada pengujian parameter secara serentak adalah

$$G = -2 \ln \frac{\mathcal{L}(\hat{\omega})}{\mathcal{L}(\hat{\Omega})} = 2(L(\hat{\Omega}) - L(\hat{\omega})),$$

dengan  $G \sim \chi_p^2$  dan  $L(.) = \ln \mathcal{L}(.)$ .

Menentukan daerah penolakan :

$H_0$  ditolak jika  $G_{hitung} > \chi_{\alpha, p}^2$  atau menolak  $H_0$  jika  $p_{value} < \alpha$ , dengan

$$p_{value} = \int_{G_{hitung}}^{\infty} \frac{y^{p/2-1} \exp[-y/2]}{\Gamma(p/2) 2^{p/2}} dy.$$

Tahapan pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial adalah sebagai berikut :

Menetapkan hipotesis :

Rumusan hipotesis pada pengujian parameter regresi secara parsial adalah

$$H_0 : \beta_h = 0$$

$$H_1 : \beta_h \neq 0; h = 1, 2, \dots, p$$

Statistik uji:

Statistik uji pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial model regresi

Weibull univariat adalah statistik Wald yang diberikan oleh

$$Z = \frac{\hat{\beta}_h}{SE(\hat{\beta}_h)},$$

dengan  $Z \sim N(0,1)$  untuk ukuran sampel  $n$  yang besar dan  $SE(\hat{\beta}_h)$  menyatakan simpangan baku dari  $\hat{\beta}_h$ .

Daerah penolakan :  $H_0$  ditolak jika

$$|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}.$$

Statistik uji Wald pada pengujian parameter regresi secara parsial model regresi Weibull juga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$Z_n^2 = \frac{\hat{\beta}_h^2}{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_h)}, \quad (2.30)$$

dimana statistik  $Z_n^2$  berdistribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas 1.  $H_0$  ditolak pada taraf uji  $\alpha$  jika nilai  $Z_n^2 > \chi_{(\alpha,1)}^2$  (Pawitan, 2001).

### 2.3. Model Geographically Weighted Univariate Weibull Regression

Sub-bab ini membahas model *geographically weighted univariate Weibull regression* (GWUWR) sebagai materi pengantar untuk memudahkan pemahaman terhadap model GWMWR. Model GWUWR adalah model regresi Weibull dengan satu respon yang berdistribusi Weibull dan semua parameter regresi bergantung pada lokasi geografis. Penaksiran parameter model GWUWR didasarkan pada ide metode GWR yaitu penaksiran parameter dilakukan secara lokal pada setiap lokasi dimana data pengamatan diperoleh, dan menggunakan pembobot spasial atau pembobot faktor lokasi geografis.

Misalkan koordinat lokasi setiap pengamatan diketahui, dan misalkan  $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$  adalah koordinat lokasi untuk pengamatan ke- $i$  dengan  $u_{1i}$  menyatakan letak lintang dan  $u_{2i}$  menyatakan letak bujur. Berdasarkan model regresi Weibull univariat yang diberikan oleh persamaan (2.26) dapat dikembangkan menjadi model regresi Weibull baru dengan semua parameter bergantung pada lokasi geografis yang dinamakan model GWUWR. Misalkan semua parameter model regresi Weibull (2.26) bergantung pada lokasi geografis, maka model GWUWR pada lokasi  $i$  dengan koordinat  $\mathbf{u}_i$  adalah

$$f(y_i) = \gamma(\mathbf{u}_i) y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)-1} \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i] \exp\{-y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)} \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i]\}. \quad (2.31)$$

Model GWUWR pada (2.31) merupakan model lokal, sehingga penaksiran parameter dilakukan secara lokal pada setiap lokasi pengamatan dan menghasilkan variasi model di suatu wilayah geografis. Jika nilai parameter model GWUWR pada setiap lokasi geografis adalah konstan, maka model GWUWR ini merupakan model global, artinya pada setiap lokasi mempunyai model yang sama.

Penaksiran parameter model GWUWR (2.31) menggunakan metode MLE. Tahap awal penaksiran parameter dengan metode MLE adalah mendefinisikan fungsi *likelihood*. Misalkan diberikan  $n$  sampel acak  $Y_i \sim W(\lambda, \gamma)$  dan  $(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ni})$  untuk  $i=1, 2, \dots, n$  adalah pengamatan untuk kovariat serta koordinat lokasi setiap pengamatan  $\mathbf{u}_i$  diketahui. Fungsi *likelihood* berdasarkan FKP (2.31) adalah

$$\mathcal{L}_1(\gamma(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \prod_{j=1}^n f(y_j) \quad (2.32)$$

Penaksiran parameter model GWUWR berdasarkan metode GWR menggunakan pembobot spasial. Pembobotan spasial dibubuhkan pada fungsi logartima natural fungsi *likelihood* untuk mendapatkan variasi model lokal dari data spasial. Misalkan  $w_{ij}$  adalah bobot faktor lokasi geografis atau bobot spasial yang diberikan kepada pengamatan pada lokasi ke  $j$  untuk model pada lokasi  $i$ , maka fungsi logaritma natural fungsi *likelihood* (2.32) dengan pembobotan spasial untuk data yang tidak dikelompokkan adalah

$$\begin{aligned} L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i)) &= \ln \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))(w_{ij}) = \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln f(y_j) \\ &= \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln(\gamma(\mathbf{u}_i) y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)-1} \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j] \exp\{-y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)} \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j]\}), \end{aligned}$$

dengan

$$\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i) = [\gamma(\mathbf{u}_i) \ \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)]^T$$

dan

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = [\beta_0(\mathbf{u}_i) \ \beta_1(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \beta_p(\mathbf{u}_i)]^T.$$

Logaritma natural fungsi *likelihood* dengan pembobotan spasial untuk data yang tidak dikelompokkan adalah

$$\begin{aligned}
L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i)) &= \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln(\gamma(\mathbf{u}_i) y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)-1} \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j] \exp\{-y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)} \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j]\}) \\
&= \sum_{j=1}^n w_{ij} \{\ln \gamma(\mathbf{u}_i) + (\gamma(\mathbf{u}_i) - 1) \ln y_j + \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j - y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)} \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j]\} \quad (2.33)
\end{aligned}$$

(Santoso dan Purhadi, 2015).

Turunan parsial orde pertama fungsi (2.33) terhadap komponen-komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i)$  masing-masing adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i)} &= \sum_{j=1}^n w_{ij} \left\{ \frac{1}{\gamma(\mathbf{u}_i)} + \ln y_j - y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)} (\ln y_j) \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j] \right\} \\
\frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)} &= \sum_{j=1}^n w_{ij} \{ \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_j y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)} \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j] \}.
\end{aligned}$$

Turunan parsial orde kedua fungsi (2.33) masing-masing adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma^2(\mathbf{u}_i)} &= \sum_{j=1}^n -w_{ij} \left\{ \frac{1}{\gamma^2(\mathbf{u}_i)} + y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)} (\ln y_j)^2 \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j] \right\}, \\
\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} &= \sum_{j=1}^n -w_{ij} \{ \mathbf{x}_j^T y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)} (\ln y_j) \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j] \}
\end{aligned}$$

dan

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n -w_{ij} \{ \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)} \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j] \}$$

Penaksir ML model GWUWR diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\text{likelihood} \quad \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i)} = \mathbf{0}.$$

(2.33) tidak dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit (*closed form*), sehingga penaksir ML tidak dapat ditemukan secara analitikal, dan hampiran penaksir ML adalah akar-akar persamaan *likelihood* yang diselesaikan dengan menggunakan metode iterasi Newton-Raphson

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(\mathbf{u}_i)^{(q^*+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q^*)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q^*)}(\mathbf{u}_i)) \mathbf{g}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q^*)}(\mathbf{u}_i)), \quad q^* = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

dengan

$$\mathbf{g}_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i)) = \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T \quad \text{dan} \quad \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i)) \quad \text{adalah matriks Hessian}$$

berukuran  $(p+2) \times (p+2)$  yang mempunyai bentuk umum

$$\mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma^2(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) \partial \gamma(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} \end{bmatrix}.$$

Tahapan analisis setelah penaksiran parameter model GWUWR adalah pengujian hipotesis parameter regresi. Pengujian hipotesis parameter regresi meliputi pengujian kesamaan model GWUWR dan RWU (*goodness of fit*), pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak dan parsial. Pengujian hipotesis kesamaan model GWUWR dan RWU bertujuan untuk menguji apakah faktor lokasi geografis berpengaruh terhadap model atau untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan antara model lokal (GWUWR) dengan model global (RWU). Tahapan pengujian hipotesis kesesuaian model GWUWR adalah sebagai berikut :

Menetapkan rumusan hipotesis :

$$H_0 : \beta_h(\mathbf{u}_i) = \beta_h \text{ untuk } h=1,2,\dots,p ; i=1,2,\dots,n$$

(faktor lokasi geografis tidak berpengaruh terhadap model)

$$H_1 : \text{Paling sedikit terdapat satu } \beta_h(\mathbf{u}_i) \neq \beta_h \text{ untuk } i=1,2,\dots,n \text{ dan } h=1,2,\dots,p$$

(faktor lokasi geografis berpengaruh terhadap model)

Mendefinisikan himpunan parameter di bawah  $H_0$  :

Himpunan parameter di bawah  $H_0$  adalah  $\omega = \{\gamma, \boldsymbol{\beta}^T\}$  dengan

$\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_p]^T$  dan maksimum fungsi *likelihood* dibawah  $H_0$  adalah

$$\mathcal{L}_1(\hat{\omega}) = \max_{\omega} \mathcal{L}_1(\gamma, \boldsymbol{\beta}) = \mathcal{L}_1(\hat{\gamma}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \prod_{i=1}^n \hat{\gamma}_i^{\hat{\gamma}_i - 1} \exp[\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}_i] \exp\{-\hat{\gamma}_i \exp[\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}_i]\},$$

dimana  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  diperoleh melalui iterasi (2.29).

Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi :

Himpunan parameter di bawah populasi adalah  $\Omega = \{\gamma(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i), i=1,2,\dots,n\}$

dan maksimum fungsi *likelihood* dibawah  $H_1$  adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\hat{\Omega}) &= \max_{\Omega \text{ dan } i=1,\dots,n} \mathcal{L}_1(\gamma(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) \\ &= \prod_{i=1}^n \hat{\gamma}(\mathbf{u}_i) y_i^{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i) - 1} \exp[\hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i] \exp\{-\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i) \exp[\hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i]\}, \end{aligned}$$

dimana  $\{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i), \hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{u}_i), i=1,2,\dots,n\}$  diperoleh melalui iterasi (2.34).



Statistik uji :

Statistik uji pada pengujian kesamaan model GWUWR dan RWU adalah

$$G_2 = -2 \ln \frac{\mathcal{L}_2(\hat{\omega})}{\mathcal{L}_1(\hat{\Omega})} = 2(L_1(\hat{\Omega}) - \ln L_2(\hat{\omega})),$$

dimana  $G_2 \sim \chi_{db}^2$  dengan  $db = (n-1)(p+2)$ .

Menentukan daerah penolakan :

$H_0$  ditolak jika  $G_{2\text{-hitung}} > \chi_{\alpha, db}^2$  atau  $H_0$  ditolak jika  $p_{\text{value}} < \alpha$ , dengan

$$p_{\text{value}} = \int_{G_{2\text{-hitung}}}^{\infty} \frac{y^{db/2-1} \exp[-y/2]}{\Gamma(db/2) 2^{db/2}} dy.$$

Statistik uji alternatif pada pengujian hipotesis kesamaan model GWUWR dan RWU adalah statistik Vounng. Statistik Vounng diturunkan berdasarkan metode *likelihood ratio test* (LRT) dan dapat digunakan dalam pemilihan model yang lebih baik antara model global (RWU) dan model lokal (GWUWR). Statistik Vounng dihitung berdasarkan nilai fungsi *log-likelihood* pada setiap pengamatan, sehingga dapat digunakan pada model regresi univariat maupun multivariat. Statistik Vounng diberikan oleh

$$V_n = \frac{\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}},$$

dengan  $M_i = \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)) - \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ ,  $\bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$ ,

dimana  $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))$  dan  $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  masing-masing adalah FKP di bawah populasi dan di bawah  $H_0$  (Vounng, 1989; Mouatassim dan Ezzahid, 2012). Statistik  $V_n$  berdistribusi normal standar. Daerah penolakan  $H_0$  pengujian parameter regresi model GWMWR secara serentak adalah  $|V_n| > Z_{1-\alpha/2}$ . Jika pada pengujian hipotesis kelayakan model GWUWR disimpulkan menolak  $H_0$ , berarti faktor lokasi geografis berpengaruh terhadap model, maka pengujian hipotesis dilanjutkan pengujian parameter regresi secara serentak dan parsial.

Tahapan pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak adalah :

Menetapkan Hipotesis :

$H_0 : \beta_1(\mathbf{u}_i) = \beta_2(\mathbf{u}_i) = \dots = \beta_p(\mathbf{u}_i) = 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$

$H_1 : \text{Paling sedikit terdapat satu } \beta_h(\mathbf{u}_i) \neq 0 \text{ untuk } h = 1, 2, \dots, p ; i = 1, 2, \dots, n$

Mendefinisikan himpunan parameter di bawah  $H_0$  :

Himpunan parameter di bawah  $H_0$  adalah  $\Omega_0 = \{\gamma(\mathbf{u}_i), \beta_0(\mathbf{u}_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ .

Maksimum fungsi *likelihood* di bawah  $H_0$  adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\hat{\Omega}_0) &= \max_{\Omega_0 \text{ dan } i=1, \dots, n} \mathcal{L}_1(\gamma(\mathbf{u}_i), \beta_0(\mathbf{u}_i)) \\ &= \prod_{i=1}^n \hat{\gamma}(\mathbf{u}_i) y_i^{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)-1} \exp[\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)] \exp\{-y_i^{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)} \exp[\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)]\}, \end{aligned}$$

dan maksimum fungsi *log-likelihood* adalah

$$L_1(\hat{\Omega}_0) = \ln \mathcal{L}_1(\hat{\Omega}_0).$$

Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi :

Himpunan parameter di bawah populasi dan maksimum fungsi *likelihood* di bawah populasi sama seperti pada pengujian kelayakan model GWUWR.

Menentukan statistik uji

Statistik uji pada pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak adalah

$$G_3 = -2 \ln \frac{\ln \mathcal{L}_1(\hat{\Omega}_0)}{\ln \mathcal{L}_1(\hat{\Omega})} = 2(L_1(\hat{\Omega}) - L_1(\hat{\Omega}_0)),$$

dimana  $G_3 \sim \chi_{df}^2$  dengan  $df = n(p+1) - (p+1) = (n-1)(p-1)$ .

Menentukan daerah penolakan :

$H_0$  ditolak pada taraf uji  $\alpha$ , jika  $G_{3\text{-hitung}} > \chi_{\alpha, (n-1)(p+1)}^2$ .

Statistik uji alternatif pada pengujian model GWUWR secara serentak adalah statistik Vounng yang diberikan oleh

$$V_n = \frac{\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}}, \quad (2.35)$$

dengan

$$M_i = \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)) - \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_0(\mathbf{u}_i)); \quad \bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i,$$

dimana  $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))$  dan  $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_0(\mathbf{u}_i))$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  masing-masing adalah FKP di bawah populasi dan di bawah  $H_0$  (Voung, 1989; Mouatassim dan Ezzahid, 2012). Statistik  $V_n$  yang diberikan oleh persamaan (2.35) berdistribusi normal standar. Daerah penolakan  $H_0$  pengujian parameter regresi model GWMWR secara serentak adalah  $|V_n| > Z_{1-\alpha/2}$ .

Pengujian hipotesis parameter regresi model GWUWR yang terakhir adalah pengujian parameter secara parsial, dengan tahapan sebagai berikut :

Menetapkan hipotesis :

$$H_0 : \beta_h(\mathbf{u}_i) = 0$$

(peubah  $X_h$  tidak berpengaruh terhadap model GWUWR pada lokasi  $\mathbf{u}_i$ )

$$H_1 : \beta_h(\mathbf{u}_i) \neq 0 ; h = 1, 2, \dots, p, i = 1, 2, \dots, n.$$

(peubah  $X_h$  berpengaruh terhadap model GWUWR pada lokasi  $\mathbf{u}_i$ )

Menentukan statistik uji :

Statistik uji pada pengujian hipotesis parameter regresi model GWUWR secara parsial adalah statistik Wald, yang diberikan oleh

$$W_n^2 = \frac{\hat{\beta}_h^2(\mathbf{u}_i)}{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i))} \quad (2.36)$$

dengan  $W_n^2 \xrightarrow{d} \chi_1^2, n \rightarrow \infty$ , dan  $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_h(\mathbf{u}_i))$  adalah elemen diagonal utama ke- $(h+2)$  dari matriks informasi Fisher  $-\mathbf{H}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(\mathbf{u}_i))^{-1}$ . Daerah kritis uji hipotesis ini adalah menolak  $H_0$  pada taraf uji  $\alpha$  jika  $W_n^2 > \chi_{(\alpha,1)}^2$  (Pawitan, 2001).

Berdasarkan model GWUWR (2.31) dapat dilakukan pengembangan dari model GWUWR ke model Regresi Weibull multivariat dengan semua parameter regresi bergantung pada lokasi geografis atau model GWMWR.

#### 2.4. Pembobot Spasial Model GWR

Ide dasar metode GWR adalah penaksiran parameter dilakukan secara lokal pada setiap lokasi dimana data pengamatan diambil dan menggunakan pembobot spasial. Penaksir parameter model GWR pada lokasi  $i$  dengan koordinat  $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$  lebih dipengaruhi oleh titik-titik yang lebih dekat dengan lokasi  $i$  dari pada titik-titik yang lebih jauh, oleh karena itu penaksiran parameter model

GWR menggunakan pembobot spasial atau pembobot lokasi geografis. Nilai pembobot spasial untuk setiap lokasi berbeda-beda untuk menunjukkan karakteristik lokal pada model. Prinsip pembobotan spasial model GWR adalah titik-titik (lokasi) yang lebih dekat dengan titik  $\mathbf{u}_i$  diberi bobot yang lebih besar dari pada titik-titik yang lebih jauh. Pembobot spasial model GWR diperoleh melalui fungsi pembobot.

Beberapa fungsi pembobot spasial dalam model GWR antara lain adalah fungsi pembobot Gauss, fungsi *bisquare* dan fungsi *tricube*. Fungsi-fungsi pembobot tersebut bergantung pada jarak antara dua lokasi pengamatan dan juga bergantung pada parameter penghalus (*bandwidth*). Beberapa penelitian model GWR yang menggunakan fungsi pembobot Gauss, *bi-square* dan *tricube* dengan *bandwidth* konstan (*fixed*) untuk setiap lokasi pengamatan antara lain penelitian yang dilakukan oleh Fotheringham dkk, (2002) dan Purhadi dan Yasin, (2012). Fungsi pembobot alternatif dalam model GWR adalah fungsi pembobot spasial adaptif, yaitu fungsi pembobot spasial dengan *bandwidth* yang berbeda-beda untuk setiap lokasi pengamatan. Fungsi pembobot Gauss adaptif diberikan oleh

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b_i}\right)^2\right), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.37)$$

dengan  $w_{ij}$  adalah bobot spasial yang diberikan kepada pengamatan pada lokasi ke- $j$  untuk model pada lokasi ke- $i$ ,  $d_{ij}$  menyatakan jarak *Euclidean* antara lokasi ke- $i$  yang mempunyai koordinat  $\mathbf{u}_i$  dengan lokasi ke- $j$  yang mempunyai koordinat  $\mathbf{u}_j$ , dan  $b_i$  adalah *bandwidth* pada lokasi ke- $i$ . Fungsi pembobot spasial *bi-square* adaptif diberikan oleh

$$w_{ij} = \begin{cases} (1 - (d_{ij}/b_i)^2)^2, & \text{jika } d_{ij} \leq b_i \\ 0, & \text{jika } d_{ij} > b_i, \end{cases} \quad (2.38)$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, n$ , dan fungsi pembobot *tricube* adaptif diberikan oleh

$$w_{ij} = \begin{cases} (1 - (d_{ij}/b_i)^3)^3, & \text{jika } d_{ij} \leq b_i \\ 0, & \text{jika } d_{ij} > b_i, \end{cases} \quad (2.39)$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Beberapa peneliti yang menggunakan fungsi pembobot spasial adaptif antara lain Fotheringham dkk, (2002); Nakaya dkk, (2005) dan Triyanto dkk, (2015).

Berdasarkan persamaan (2.37), (2.38) dan (2.39), bahwa fungsi pembobot spasial bergantung pada *bandwidth*, sehingga pemilihan nilai *bandwidth* yang tepat merupakan permasalahan yang sangat penting. Pemilihan nilai *bandwidth* yang sangat besar menyebabkan nilai bobot spasial akan mendekati satu untuk semua titik, akibatnya penaksir parameter model GWR di setiap lokasi menjadi seragam, sehingga model lokal identik dengan model global. Sebaliknya, nilai *bandwidth* yang terlalu kecil menyebabkan penaksir parameter akan sangat bergantung pada pengamatan-pengamatan yang dekat dengan lokasi  $\mathbf{u}_i$  dan akan meningkatkan variansi (Fotheringham dkk, 2002). Permasalahan penentuan *bandwidth* optimal dapat diatasi dengan penggunaan kriteria.

Beberapa kriteria pemilihan *bandwidth* optimal adalah kriteria *Cross-Validation* (CV), *Generalized Cross-validation Criterion* (GCV) dan *Akaike Information Criterion* (AIC). Peneliti yang menggunakan kriteria CV dalam pemilihan *bandwidth* antara lain Cleveland, (1979) pada model regresi lokal dan Puhadi dan Yasin, (2012) dalam model campuran MGWR. Kriteria GCV pertama kali digunakan oleh Craven dan Wahba, (1979) pada bahasan *smoothing splines*. Fotheringham dkk, (2002) menggunakan ketiga kriteria CV, GCV dan AIC dalam pemilihan *bandwidth* model GWR. Triyanto dkk, (2014) menggunakan kriteria GCV dalam pemilihan *bandwidth* optimal. Kriteria AIC mula-mula dibahas oleh Akaike, (1973) dalam *Symposium on information theory* kedua. Nakaya dkk, (2005) menggunakan kriteria AIC dalam model GW regresi Poisson.

Penentuan *bandwidth* optimal dengan kriteria AIC adalah dengan meminimumkan nilai AIC, dimana skor AIC untuk model GWR didefinisikan oleh

$$AIC(b) = -2L(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)) + 2v, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.40)$$

dengan  $L(\cdot)$  adalah logaritma natural dari fungsi *likelihood*,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah penaksir ML model lokal pada semua lokasi dan  $v$  adalah banyaknya parameter dalam model (Pawitan, 2001). Kriteria lain dalam penentuan

*bandwidth* optimal adalah *Bayesian Information Criterion* (BIC). Kriteria BIC pertama kali diterapkan oleh Nakaya, (2001) dalam *local spatial interaction modelling* dengan pendekatan GWR. Berdasarkan keberhasilan penggunaan kriteria BIC dalam penelitian Nakaya, (2001), maka BIC merupakan kriteria alternatif dalam pemilihan *bandwidth* optimal pada model GWR (Fotheringham dkk, 2002). Skor BIC didefinisikan oleh

$$\text{BIC}(b) = -2L(\hat{\theta}(\mathbf{u}_i)) + \tau \ln(n), \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.41)$$

dengan  $L(\cdot)$  adalah logaritma natural dari fungsi *likelihood*,  $\hat{\theta}(\mathbf{u}_i)$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah penaksir ML parameter model GWR pada semua lokasi dan  $\tau$  adalah banyaknya parameter dalam model. *Bandwidth* optimum adalah  $b_0 = \{b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  yang dipilih sebagai nilai-nilai *bandwidth* yang diinginkan sedemikian sehingga  $\text{BIC}(b_0) = \min(\text{BIC}(b))$ . AIC dan BIC adalah kriteria yang umum digunakan pada pemilihan model regresi, dimana model yang mempunyai nilai AIC atau BIC lebih kecil adalah model yang lebih baik. Nilai BIC dan AIC dihitung berdasarkan nilai maksimum fungsi *log-likelihood* dimana model yang mempunyai nilai maksimum *log-likelihood* lebih besar adalah model yang lebih baik atau ekuivalen dengan model yang mempunyai nilai AIC dan BIC yang lebih kecil adalah model yang lebih baik (Pawitan, 2001).

## 2.5. Beberapa Definisi dan Teorema Dasar

Sub-bab ini membahas beberapa definisi dan teorema dasar antara lain teorema ketidaksamaan Chebyshev dan markov, definisi-definisi tentang konvergen, teorema hukum bilangan besar dan teorema limit pusat, definisi penaksir tak bias, serta sifat regularitas yang mendasari pembahasan sifat-sifat asimtotik penaksir *maximum likelihood* (ML) pada bahasan selanjutnya.

**Definisi 2.1** (Serfling, 1980)

Jika  $X_1, X_2, \dots$  dan  $X$  adalah peubah acak pada ruang probabilitas  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , maka  $X_n$  dikatakan konvergen dalam probabilitas ke  $X$ , jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1, \text{ untuk setiap } \varepsilon > 0,$$

dan ditulis  $X_n \xrightarrow{P} X, n \rightarrow \infty$ .

Perluasan dalam bentuk vektor : jika  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$  dan  $\mathbf{X}$  adalah vektor acak berdimensi  $k$  pada ruang probabilitas  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , maka  $\mathbf{X}_n$  dikatakan konvergen dalam probabilitas ke  $\mathbf{X}$ , atau  $\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X}, n \rightarrow \infty$ , jika  $\|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}\| \xrightarrow{P} 0$ .

**Definisi 2.2** (Serfling, 1980)

Jika  $X_1, X_2, \dots$  dan  $X$  adalah peubah acak pada ruang probabilitas  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , maka  $X_n$  dikatakan konvergen dengan probabilitas 1 ke  $X$  (atau secara kuat, secara hampir pasti, hampir dimana-mana) ke  $X$ , jika

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1,$$

dan ditulis menggunakan notasi  $X_n \xrightarrow{wp1} X$ . Kondisi yang ekuivalen untuk konvergen  $wp1$  adalah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_m - X| < \varepsilon, \forall m \geq n) = 1 \text{ untuk semua } \varepsilon > 0.$$

Perluasan dalam bentuk vektor :

jika  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$  dan  $\mathbf{X}$  adalah vektor acak berdimensi  $k$  pada ruang probabilitas  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , maka  $\mathbf{X}_n$  dikatakan konvergen dengan probabilitas 1 ke  $\mathbf{X}$ , atau  $\mathbf{X}_n \xrightarrow{wp1} \mathbf{X}, n \rightarrow \infty$  jika  $\|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}\| \xrightarrow{wp1} 0$ .

**Definisi 2.3** (Serfling, 1980)

Jika  $X_1, X_n, \dots$  dan  $X$  adalah peubah acak (tidak perlu dalam ruang probabilitas) masing-masing dengan fungsi berdistribusi  $F_1(\cdot), F_2(\cdot), \dots$  dan  $F(\cdot)$ , maka  $X_n$  dikatakan konvergen dalam distribusi (atau dalam hukum) ke  $X$ , jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t),$$

untuk setiap titik  $t$  yang  $F_X(\cdot)$  kontinu disitu, dan ditulis dengan  $\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X}$  atau sering ditulis  $F_n \Rightarrow F$ .

**Definisi 2.4** (Dudewicz dan Mishra, 1988)

Suatu barisan distribusi gabungan peubah acak  $X_1, X_2, \dots, X_n$  dengan *mean* dan variansi berhingga dikatakan memenuhi teorema limit pusat (TLP) jika dan hanya jika  $Z_n$  yang didefinisikan oleh

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)},$$

dengan

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  dan  $\sigma(S_n) = \text{var}(S_n)$ , konvergen dalam distribusi ke suatu peubah acak yang berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan variansi 1.

**Definisi 2.5** (Dudewicz dan Mishra, 1988)

Kita mengatakan  $t_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$  adalah sebuah penaksir tak bias dari parameter  $\theta$  jika  $E(\hat{\theta}) = \theta$ , untuk semua  $\theta \in \Theta$ .

**Definisi 2.6** (Dudewicz dan Mishra, 1988)

Kita mengatakan  $t_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$  adalah sebuah penaksir tak bias asimtotik dari parameter  $\theta$ , jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(\theta) = 0, \text{ untuk semua } \theta \in \Theta,$$

dengan  $b(\theta)$  adalah bias dari penaksir  $t_n(\cdot)$  yang didefinisikan oleh

$$b(\theta) = E[t_n(X_1, X_2, \dots, X_n)] - \theta.$$

**Definisi 2.7** (Dudewicz dan Mishra, 1988)

Jika  $X_1, X_2, \dots, X_n$  peubah acak yang diamati dengan fungsi distribusi  $F_{X_1, \dots, X_n}(y_1, \dots, y_n | \theta)$  dengan parameter yang tidak diketahui  $\theta \in \Theta$ , maka barisan  $t_1, t_2, \dots$  disebut barisan penaksir  $\theta$  yang konsisten, jika dan hanya jika (bila  $n \rightarrow \infty$ )

$$t_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \xrightarrow{p} \theta, \text{ semua } \theta \in \Theta.$$

**Definisi 2.8** (Hogg dan Craig, 1995)

Misalkan  $\mathcal{L}(\theta | \mathbf{y})$  adalah fungsi *likelihood*,  $\Omega$  adalah himpunan parameter di bawah populasi dengan fungsi *likelihood* adalah  $\mathcal{L}(\Omega)$  dan  $\Omega_0$  adalah himpunan parameter di bawah  $H_0$ , dengan fungsi *likelihood*  $\mathcal{L}(\Omega_0)$ . Besaran

$$\tau(\mathbf{y}) = \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega})},$$

dengan

$$\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0) = \sup_{\theta \in \Omega_0} \mathcal{L}(\theta | \mathbf{y}) \text{ dan } \mathcal{L}(\hat{\Omega}) = \sup_{\theta \in \Omega} \mathcal{L}(\theta | \mathbf{y})$$



dinamakan *likelihood ratio* (rasio *likelihood*), dengan  $\mathcal{L}(\cdot)$  fungsi *likelihood*.

Uji LRT adalah suatu uji yang menolak  $H_0$  jika dan hanya

$$\tau(\mathbf{y}) = \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega})} \leq c$$

dengan  $0 \leq c \leq 1$  dan  $\tau(\mathbf{y})$  adalah statistik rasio *likelihood*.

**Teorema 2.1** (Serfling, 1980)

Diketahui  $X_1, X_2, \dots$  tidak berkorelasi dengan *mean* berturut-turut  $\mu_1, \mu_2, \dots$  dan

variansi berturut-turut  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$ . Jika  $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = o(n^2)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , maka

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \xrightarrow{p} 0.$$

$o(\cdot)$  dinamakan o kecil (*little oh*) menunjukkan cara perbandingan *magnitude* dari dua fungsi  $u(x)$  dan  $v(x)$  sebagai argumen  $x$  menuju ke suatu bilangan  $L$  (tidak harus berhingga). Notasi  $u(x) = o(v(x))$ ,  $x \rightarrow \infty$ , menyatakan bahwa

$$\lim_{x \rightarrow L} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

**Teorema 2.2** (Serfling, 1980)

Diketahui  $X_1, X_2, \dots$  bebas dengan *mean* berturut-turut  $\mu_1, \mu_2, \dots$  dan variansi

masing-masing adalah  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$ . Jika deret  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2}$  konvergen, maka

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \xrightarrow{wp1} 0.$$

**Teorema 2.3** (Dudewicz dan Mishra, 1988)

Diketahui  $\delta > 0$  tertentu. Diketahui  $X$  adalah suatu peubah acak dengan *mean*  $\mu$

dan variansi  $\sigma^2$ , maka  $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}$ .

(Teorema 2.3 dinamakan ketidaksamaan Chebyshev)

**Teorema 2.4** (Dudewicz dan Mishra, 1988)

Diketahui  $t > 0$  dan  $a \geq 0$  tertentu. Diketahui  $Y$  adalah peubah acak sedemikian sehingga  $P(Y \geq 0) = 1$ , maka

$$P(Y \geq t) \leq \frac{E(Y^a)}{t^a}.$$

(Teorema 2.4 dinamakan teorema Markov).

**Teorema 2.5** (Dudewicz dan Mishra, 1988)

Diketahui  $X_1, X_2, \dots, X_n$  adalah peubah-peubah acak yang bebas sedemikian sehingga  $EX_i = a$ ,  $\sigma^2(X_i) = b^2$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ . Diketahui  $\delta > 0$  dan  $\varepsilon > 0$  sebarang,

maka terdapat  $M(\varepsilon, \delta)$  sedemikian sehingga untuk semua  $n > M(\varepsilon, \delta)$

$$P\left[\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| > \delta\right] < \varepsilon,$$

dan disingkat dengan

$$\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \xrightarrow{p} a.$$

(Teorema 2.3 dinamakan Hukum Lemah Bilangan Besar (HLBB)).

**Teorema 2.6** (Dudewicz dan Mishra, 1988)

Diketahui  $X_1, X_2, \dots, X_n$  adalah peubah acak *iid* dengan *mean*  $E(X_i) = \mu$  dan  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$  (keduanya berhingga). Maka (untuk setiap  $z$ ,  $-\infty < z < +\infty$ ) untuk  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

dengan  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Teorema 2.6 dinamakan teorema limit pusat dan juga

disebut teorema Lindberg-Levy.

**Teorema 2.7** (Rencher, 2000)

Misalkan  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  adalah sebuah sampel acak yang saling bebas dari populasi berdistribusi normal baku, yakni  $Z_k \sim N(0, 1)$  untuk  $k = 1, 2, \dots, n$ , maka vektor acak

$$\mathbf{z} = [Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_n]^T \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$$

dan

$$\sum_{k=1}^n Z_k^2 = \mathbf{z}^T \mathbf{z} \sim \chi_n^2.$$

Pada bagian akhir sub-bab ini dikemukakan kondisi-kondisi regularitas yang berhubungan dengan sifat-sifat asimtotik penaksir ML. Misalkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  menyatakan sebuah sampel dari suatu pengamatan dari suatu distribusi  $F_\theta$  yang berada dalam keluarga  $\mathcal{F} = \{F_\theta, \theta \in \Theta\}$  dengan  $\Theta \subset \mathbf{R}^k$ , maka kondisi-kondisi regularitas pada  $\mathcal{F}$  adalah sebagai berikut :

(R1). Untuk setiap  $\theta \in R^m$ , turunan-turunan parsial  $\frac{\partial L(\theta | \mathbf{y})}{\partial \theta_k}$ ,  $\frac{\partial^2 L(\theta | \mathbf{y})}{\partial \theta_k \partial \theta_l}$  dan

$$\frac{\partial^3 L(\theta | \mathbf{y})}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l}, \text{ untuk } k, l, j = 1, 2, \dots, m \text{ terdefinisi untuk setiap } \mathbf{y}.$$

(R2). Untuk setiap  $\theta_0 \in R^m$  terdapat fungsi-fungsi  $g(\mathbf{y})$ ,  $h^*(\mathbf{y})$  dan  $H(\mathbf{y})$  sedemikian sehingga untuk setiap  $\theta$  yang berada dalam lingkungan (*neighborhood*)  $\theta_0$  atau ditulis  $\theta \in N_e(\theta_0)$ , maka hubungan-hubungan

$$\left\| \frac{\partial L(\theta | \mathbf{y})}{\partial \theta_k} \right\| \leq g(\mathbf{y}); \quad \left\| \frac{\partial^2 L(\theta | \mathbf{y})}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \right\| \leq h^*(\mathbf{y}) \text{ dan } \left\| \frac{\partial^3 L(\theta | \mathbf{y})}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l} \right\| \leq \|H(\mathbf{y})\|$$

berlaku untuk semua  $\mathbf{y}$  dan juga

$$\int \dots \int g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} < \infty; \quad \int \dots \int h(\mathbf{y}) d\mathbf{y} < \infty; \quad \|E_\theta \{\mathbf{H}(\mathbf{y})\}\| < \infty \quad \text{untuk setiap } \theta \in N_e(\theta_0).$$

(R3). Untuk setiap  $\theta \in R^m$  memenuhi  $0 < \left\| E_\theta \left\{ \frac{\partial^2 L(\theta | \mathbf{y})}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \right\} \right\| < \infty$ , dengan  $\|\cdot\|$

adalah norm dari matriks (Serfling, 2002).

## 2.6. Sifat Asimtotik Penaksir *Maximum Likelihood*

Metode MLE merupakan salah satu metode yang digunakan pada penaksiran parameter suatu distribusi. Sesuai namanya, prinsip metode *maximum likelihood* adalah menentukan penaksir dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*. Metode MLE merupakan metode yang paling populer dalam penaksiran parameter dibanding dengan metode yang lain, karena mempunyai

sifat asimtotik yang baik berdasarkan syarat-syarat regularitas tertentu. Berikut ini dikemukakan teorema pada MLE.

Diketahui  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  adalah penaksir ML dari  $\boldsymbol{\theta}$ , dengan  $\boldsymbol{\theta}_0$  adalah nilai yang benar dari vektor parameter  $\boldsymbol{\theta}$  dan  $E_0(\cdot)$  menyatakan ekspektasi yang didasarkan pada nilai-nilai parameter yang sebenarnya. Di bawah kondisi-kondisi regularitas dan jika fungsi *likelihood* mencapai maksimumnya pada  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , yang menjadi solusi tunggal sistem persamaan *likelihood* dan sebuah titik interior dari ruang parameter maka penaksir ML mempunyai sifat-sifat asimtotik sebagai berikut :

a. Konsisten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0| > \varepsilon) = 0, \text{ untuk } \varepsilon > 0$$

b. Normalitas asimtotik

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{asym} \mathbf{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0, [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}),$$

dimana

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)] = -E_0 \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\theta}_0 \partial \boldsymbol{\theta}_0^T} \right).$$

Penaksir ML  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  adalah takbias asimtotik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \boldsymbol{\theta}_0,$$

dengan matriks varians-kovarians asimtotik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}$$

c. Invarian

Penaksir ML dari  $\gamma_0 = \varphi(\boldsymbol{\theta}_0)$  adalah  $\varphi(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ , jika  $\varphi(\cdot)$  adalah sebuah fungsi kontinu dan kontinu terdeferensialkan (Rinne, 2009).

Distribusi asimtotik dari penaksir ML  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  dinyatakan dalam suatu teorema, yaitu hasil-hasil berikut ini adalah ekuivalen :

a.  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)]^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p);$

b.  $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})](\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \chi_p^2,$

dengan  $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]$  adalah matriks informasi Fisher (Pawitan, 2001).

## 2.7. Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi data sampel multivariat dapat dilakukan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov (K-S) multivariat. Misalkan  $(Y_{1i} \ Y_{2i} \ \cdots \ Y_{mi})$ ,  $i=1,2,\dots,n$  adalah sampel acak yang saling bebas dan berdistribusi identik dari suatu populasi, dengan fungsi distribusi  $F$  yang tidak diketahui. Berdasarkan sampel acak yang diberikan, akan dilakukan pengujian, apakah sampel tersebut berasal dari suatu populasi yang berdistribusi tertentu, dengan fungsi distribusi  $F^*$ , dimana  $F^*$  diketahui. Rumusan hipotesis pengujian distribusi adalah

$$H_0 : F = F^*$$

$$H_1 : F \neq F^* .$$

Statistik uji pengujian distribusi dengan uji Kolmogorov-Smirnov multivariat adalah

$$D = \max_{1 \leq j^* \leq m!} D^{(j^*)}, \quad (2.42)$$

dengan  $D^{(j^*)}$  ditentukan oleh

$$\begin{aligned} D^{(j^*)} &= \sup_{\mathbf{z}^{j^*}} | G(\mathbf{z}_1^{j^*}, \mathbf{z}_2^{j^*}, \dots, \mathbf{z}_m^{j^*}) - F(\mathbf{z}_1^{j^*}, \mathbf{z}_2^{j^*}, \dots, \mathbf{z}_m^{j^*}) | \\ &= \sup_{\mathbf{z}^{j^*}} | G(\mathbf{z}_1^{j^*}, \mathbf{z}_2^{j^*}, \dots, \mathbf{z}_m^{j^*}) - z_1^{j^*} z_2^{j^*} \cdots z_m^{j^*} |, \end{aligned} \quad (2.43)$$

dengan  $G$  adalah FDK empiris,  $F$  adalah FDK teoritis dan  $\mathbf{z}_1^{j^*}, \mathbf{z}_2^{j^*}, \dots, \mathbf{z}_m^{j^*}$  berturut-turut adalah nilai-nilai dari peubah acak  $\mathbf{Z}_1^{j^*}, \mathbf{Z}_2^{j^*}, \dots, \mathbf{Z}_m^{j^*}$ . Peubah acak  $\mathbf{Z}_1^{j^*}, \mathbf{Z}_2^{j^*}, \dots, \mathbf{Z}_m^{j^*}$  adalah saling bebas dan berdistribusi identik uniform  $[0,1]$  yang diperoleh dari suatu transformasi  $\mathbf{Z}^{j^*} = T(\mathbf{Y}^{j^*})$  yang didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1^{j^*} &= F(\mathbf{Y}_1^{j^*}) \\ \mathbf{Z}_2^{j^*} &= F(\mathbf{Y}_2^{j^*} | \mathbf{Y}_1^{j^*}) \\ \mathbf{Z}_3^{j^*} &= F(\mathbf{Y}_3^{j^*} | \mathbf{Y}_1^{j^*}, \mathbf{Y}_2^{j^*}) \\ &\vdots \\ \mathbf{Z}_k^{j^*} &= F(\mathbf{Y}_k^{j^*} | \mathbf{Y}_1^{j^*}, \mathbf{Y}_2^{j^*}, \dots, \mathbf{Y}_{k-1}^{j^*}) \text{ untuk } k = 2, 3, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.44)$$

dengan  $(\mathbf{Y}_1^{j^*}, \mathbf{Y}_2^{j^*}, \dots, \mathbf{Y}_m^{j^*})$  untuk  $j^* = 1, 2, \dots, m!$  adalah permutasi ke-  $j^*$  dari peubah acak  $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_m)$ , (Justel dan Peña dan Zamar, 1997). FDK empiris

didefinisikan oleh  $G(z_{1i}^{j*}, z_{2i}^{j*}, \dots, z_{mi}^{j*}) = \frac{n_{ij*}}{n}$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $j^* = 1, 2, \dots, m!$

dengan  $n$  adalah ukuran sampel.  $n_{ij*}$  menyatakan banyaknya

$(z_{1\ell}^{j*}, z_{2\ell}^{j*}, \dots, z_{m\ell}^{j*}) \in \{(z_{1i}^{j*}, z_{2i}^{j*}, \dots, z_{mi}^{j*}), i = 1, 2, \dots, n\}$  untuk  $\ell = 1, 2, \dots, n$  yang

memenuhi  $z_{1\ell}^{j*} \leq z_{1i}^{j*}, z_{2\ell}^{j*} \leq z_{2i}^{j*}, \dots, z_{m\ell}^{j*} \leq z_{mi}^{j*}$  (Dudewicz dan Mishra, 1988).

Berdasarkan persamaan (2.18), FDK teoritis distribusi Weibull trivariat dapat dinyatakan

$$F(y_1, y_2, y_3) = 1 - S(y_1) - S(y_2) - S(y_3) + S(y_1, y_2) + S(y_1, y_3) + S(y_2, y_3) - S(y_1, y_2, y_3). \quad (2.45)$$

Uji K-S multivariat menolak  $H_0$  pada taraf uji  $\alpha$ , jika nilai statistik  $D$  lebih besar dari persentil ke- $100(1-\alpha)$  distribusi  $D$ .

Persentil ke- $100(1-\alpha)$  distribusi  $D$  dapat ditentukan menggunakan simulasi Monte Carlo. Simulasi Monte Carlo didefinisikan sebagai skema yang menggunakan bilangan acak  $U(0,1)$ , yaitu bilangan acak berdistribusi uniform pada interval  $[0,1]$ , yang dipakai untuk memecahkan permasalahan stokastik atau deterministik tertentu dimana berjalannya waktu tidak memegang peranan penting. Ide dasar metode Monte Carlo untuk memecahkan permasalahan integral dapat dijelaskan sebagai berikut :

Misalkan penentuan nilai integral tentu

$$B = \int_a^b g(x)dx, \quad (2.46)$$

dengan  $g(x)$  adalah fungsi bernilai riil yang sulit (tidak dapat) diintegrasikan secara analitik. Permasalahan deterministik (2.46) dapat dihipotesis dengan simulasi Monte Carlo. Misalkan ditentukan  $M$  sebagai peubah acak  $(b-a)g(x)$ , dengan  $X \sim U(a,b)$ , yakni  $X$  adalah peubah acak kontinu yang berdistribusi uniform pada interval  $[a,b]$ . Nilai ekspektasi dari  $M$  adalah

$$\begin{aligned} E(M) &= E[(b-a)g(x)] = (b-a)E[g(x)] \\ &= (b-a) \int_a^b g(x)f_X(x)dx = (b-a) \frac{\int_a^b g(x)dx}{(b-a)} \end{aligned}$$

$$E(M) = \int_a^b g(x)dx = B, \quad (2.47)$$

dengan  $f_X(x) = 1/(b-a)$  adalah FKP dari peubah acak  $X$ . Berdasarkan (2.47), permasalahan penentuan nilai integral tentu (2.46) direduksi menjadi permasalahan penaksiran nilai ekspektasi  $E(M)$ . Nilai dari  $E(M) = B$  dapat ditaksir (dihampiri) dengan *mean* sampel yaitu

$$M(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i), \quad (2.48)$$

dengan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  adalah sampel acak yang saling bebas dan berdistribusi identik  $U(a,b)$  (Khuri, 2003).

## 2.8. Pengujian Multikolinieritas

Multikolinieritas dalam model regresi terjadi jika terdapat hubungan yang erat antar kovariat (peubah bebas). Model regresi yang memuat multikolinieritas akan menyebabkan variansi penaksir parameter menjadi besar. Multikolinieritas dalam model regresi dideteksi berdasarkan nilai kecepatan kenaikan variansi atau *variance-inflating factor* (VIF). Suatu model regresi terdapat multikolinieritas, jika nilai VIF lebih dari 10 (Ryan, 1996).

Nilai VIF untuk kovariat  $X_h$  dihitung menggunakan formula

$$VIF = \frac{1}{1 - R_h^2} = \frac{SST_h}{SSE_h}, \quad (2.49)$$

dengan  $R_h^2$  menyatakan koefisien determinasi model regresi dari kovariat  $X_h$  yang diregresikan terhadap  $(p - 1)$  kovariat yang lainnya, yaitu  $X_1, X_2, \dots, X_{h-1}, X_{h+1}, \dots, X_p$ . Koefisien determinasi pada (2.49) dihitung menggunakan formula

$$R_h^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (X_{hi} - \hat{X}_{hi})^2}{\sum_{i=1}^n (X_{hi} - \bar{X}_h)^2} = \frac{SSR_h}{SST_h}, \quad (2.50)$$

dengan

$X_{hi}$  adalah nilai pengamatan ke- $i$  untuk kovariat ke- $h$ ;

$\hat{X}_{hi}$  adalah nilai taksiran dari  $X_{hi}$  dan  $\bar{X}_h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{hi}$  ;

$SST_h = \sum_{i=1}^n (X_{hi} - \bar{X}_h)^2$  adalah *total sum of squares*;

$SSE_h = \sum_{i=1}^n (X_{hi} - \hat{X}_{hi})^2$  adalah *error sum of squares* ;

$SSR_h = \sum_{i=1}^n (\hat{X}_{hi} - \bar{X}_h)^2$  adalah *regression sum of squares*, (Rencher, 2000),

## 2.9. Pengujian Heterogenitas Spasial

Pengujian heterogenitas spasial merupakan salah satu tahapan analisis yang dilakukan pada model regresi spasial untuk mengetahui adanya ketergantungan antara respon dan lokasi geografis. Hipotesis pengujian heterogenitas spasial adalah

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2 = \sigma^2$$

(faktor lokasi geografis tidak berpengaruh terhadap respon)

$$H_1 : \text{Paling sedikit ada satu } \sigma_i^2 \neq \sigma^2 \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.51)$$

(faktor lokasi geografis berpengaruh terhadap respon).

Pengujian heterogenitas spasial dilakukan melalui pengujian heteroskedastisitas terhadap model regresi linier yang menyatakan hubungan antara respon dan kovariat. Metode pengujian heteroskedastisitas terhadap model regresi linier berganda pada bahasan ini menggunakan metode Glesjer (Yan dan Su, 2009).

Misalkan diberikan model regresi yang menyatakan hubungan kausal antara respon  $Z$  dengan  $p$  kovariat  $X_1, X_2, \dots, X_p$  sebagai berikut

$$Z = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + e. \quad (2.52)$$

Tahapan pengujian heteroskedastisitas terhadap model regresi linier berganda (2.52) adalah sebagai berikut.

- (1) Menentukan penaksir parameter model regresi (2.52) berdasarkan data sampel yang diberikan.
- (2) Menghitung *error*  $e_i = z_i - \hat{z}_i$  dan kuadrat *error*  $e_i^2$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ , dengan  $n$  adalah ukuran sampel.
- (3) Menentukan model regresi (*auxiliary*)  $e^2$  terhadap  $p$  kovariat, yaitu
$$e^2 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon.$$
- (4) Menentukan penaksir parameter model regresi pada tahap (3)



(5) Melakukan pengujian parameter regresi secara serentak terhadap model regresi pada tahap (3).

Berdasarkan tahap (5), jika pada pengujian parameter regresi secara serentak terhadap model regresi pada tahap (3) diperoleh kesimpulan kovariat secara bersama-sama berpengaruh terhadap kuadrat *error*, berarti varians *error* tidak konstan atau varians respon tidak konstan dan diduga dipengaruhi oleh faktor lokasi geografis.

Statistik uji pengujian heterogenitas spasial (2.51) adalah statistik uji pada pengujian parameter regresi secara serentak terhadap model regresi linier berganda pada tahap (3), yaitu

$$F = \frac{SSR / p}{SSE / (n - p - 1)}, \quad (2.53)$$

dengan

$$SSR = \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} - n \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)^2,$$

$$SSE = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y},$$

dimana

$$\hat{\beta} = [\hat{\beta}_0 \ \hat{\beta}_1 \ \cdots \ \hat{\beta}_p]^T; \ \mathbf{y} = [e_1^2 \ e_2^2 \ \cdots \ e_n^2]^T.$$

Statistik  $F$  yang diberikan oleh persamaan (2.53) berdistribusi  $F_{(p, n-p-1)}$  dan pada taraf uji  $\alpha$ , uji ini menolak  $H_0$  jika nilai  $F > F_{(\alpha, (p-n-p-1))}$  (Rencher, 2000).

## 2.10. Kondisi Kali Surabaya dan Sumber Pencemar Air Sungai

Kali Surabaya sepanjang lebih dari 50 km merupakan cabang dari sungai Brantas yang airnya digunakan berbagai macam keperluan antara lain, air baku instalasi pengolahan air bersih Perusahaan Air Minum (PAM), irigasi untuk sebagian daerah sistem delta Brantas, industri-industri di Kota Surabaya dan Gresik, perikanan tambak, penggelontoran dan pengeceran air buangan yang berada dalam saluran-saluran drainase Kota Surabaya, serta pembawa buangan industri dan rumah tangga menuju ke laut. Penggunaan air Kali Surabaya dan sungai-sungai di Surabaya secara garis besar adalah untuk kelangsungan hidup manusia dan sebagai saluran pembuangan limbah rumah tangga dan industri.

Kondisi seperti ini menimbulkan dugaan bahwa air sungai di Surabaya tercemar dan kualitasnya kurang baik. Hal ini menjadi permasalahan bagi instalasi pengolahan air bersih dan masyarakat Kota Surabaya, karena air sungai yang tercemar dapat mengancam kesehatan mereka.

Pencemaran atau polusi air adalah penyimpangan sifat-sifat air dari keadaan normal bukan dari kemurniannya (Fardiaz, 1992). Definisi pencemaran air berdasarkan Surat Keputusan Menteri Negara Kependudukan dan Lingkungan Hidup nomor Kep-02/MENKLH/1998, tentang penetapan baku mutu lingkungan adalah masuk atau dimasukkannya makhluk hidup, zat, energi dan atau komponen lain ke dalam air dan atau berubahnya tatanan air oleh kegiatan manusia atau oleh proses alam, sehingga kualitas air turun sampai ke tingkat tertentu yang menyebabkan air menjadi kurang atau sudah tidak berfungsi lagi sesuai dengan peruntukannya. Perkembangan industri yang sangat pesat di Kota Surabaya, dan bertambahnya pemukiman penduduk di sepanjang sungai, maka perlu tindakan yang cepat dan tepat untuk mengendalikan kualitas air sungai di Surabaya (*Kali Surabaya pollution study*, Ditjen Cipta Karya Dep. PU. 1985 dalam Sastrawijaya, 2009). Pada umumnya lingkungan daerah aliran sungai (DAS) di Surabaya adalah pemukiman penduduk, industri, area pertanian dan peternakan yang berpotensi menghasilkan bahan buangan yang dapat menyebabkan air sungai tercemar.

Sumber pencemar air sungai dapat dibedakan menjadi sumber domestik dan nondomestik. Sumber pencemar domestik (rumah tangga) adalah semua buangan (limbah) yang berasal dari penduduk perkampungan dan kota, pasar, jalan, terminal, rumah sakit, hotel restoran. Sumber pencemar nondomestik adalah buangan yang berasal dari pabrik, industri, pertanian, perikanan, peternakan, transportasi dan sebagainya. Bentuk pencemar air dapat dibagi menjadi bentuk cair, padat, gas dan kebisingan.

Berdasarkan caranya, pengamatan indikator dan komponen pencemaran air lingkungan dapat digolongkan menjadi pengamatan secara fisik, secara kimia dan biologi (Slamet, 2004). Beberapa indikator fisik yang menentukan kualitas air adalah tingkat kejernihan kekeruhan (turbiditas), warna, transparansi, suhu, kecepatan aliran, volume aliran dan sifat dasar sungai. Faktor fisik yang juga

menentukan kualitas air sungai adalah profil kedalaman sungai, tepi sungai serta perbandingan antara laju pemasukan dan pengaliran keluar.

Pendeteksian kualitas air dapat dilakukan melalui pengujian, yaitu untuk menentukan sifat-sifat air dan untuk mengetahui apakah terjadi penyimpangan dari batasan-batasan polusi air (Fardiaz, 1992). Uji atau pengamatan fisik yang umum digunakan untuk menentukan pencemaran air adalah perubahan rasa, warna dan bau air, perubahan suhu air, tingkat kejernihan atau kekeruhan dan debit air. Uji secara kimiawi adalah pengujian pencemaran air berdasarkan perubahan PH dan zat kimia yang terlarut dalam air. Sedangkan pengujian secara biologis adalah pengujian pencemaran air berdasarkan mikroorganisme yang ada di dalam air terutama ada tidaknya bakteri pathogen. Beberapa faktor yang berpengaruh terhadap kualitas air adalah sifat fisik, sifat kimia dan sumber pencemar. Indikator atau parameter yang umum digunakan untuk mendeteksi kualitas air adalah konsentrasi oksigen terlarut atau *dissolved oxygen* (DO), kebutuhan oksigen biologi atau *biochemical oxygen demand* (BOD), kebutuhan oksigen pada oksidasi secara kimia atau *chemical oxygen demand* (COD), serta kandungan zat-zat organik dalam air seperti fosfat, nitrat, nitrit, amonia, logam berat (Achmad, 2004).

### **2.11. Padatan Tersuspensi Total (*Total Suspended Solid*)**

Air yang tercemar selalu mengandung padatan yang dapat dibedakan atas empat kelompok berdasarkan besar partikelnya dan sifat-sifat lain terutama kelarutannya, yaitu padatan terendap (sedimen), padatan tersuspensi dan koloid, padatan terlarut, serta minyak dan lemak (Fardiaz, 1992). Sedimen adalah padatan yang dapat langsung mengendap jika air didiamkan tidak terganggu selama beberapa waktu. Sedimen terdiri dari partikel-partikel padatan yang mempunyai ukuran relatif besar dan berat sehingga dapat mengendap dengan sendirinya. Sedimen yang terdapat di dalam air biasanya terbentuk sebagai akibat erosi dan merupakan padatan yang umum terdapat di dalam air permukaan. Adanya sedimen dalam jumlah tinggi akan menurunkan kualitas air, karena sedimen menyebabkan air menjadi keruh, mengurangi penetrasi sinar matahari ke dalam air, sehingga mengurangi kecepatan fotosintesis tanaman air.

Padatan tersuspensi adalah padatan yang menyebabkan kekeruhan air, tidak terlarut dan tidak mengendap langsung. Padatan tersuspensi biasanya bersifat anorganik maupun organik. Padatan tersuspensi dalam air pada umumnya terdiri dari fitoplankton, zooplankton, kotoran manusia, kotoran hewan, lumpur, sisa tanaman dan hewan dan limbah industri (Sastrawijaya, 2009). Air buangan selain mengandung padatan tersuspensi juga sering mengandung bahan-bahan yang bersifat koloid seperti protein. Buangan industri dapat juga merupakan sumber kekeruhan. Zat organik dapat menjadi makanan bakteri, sehingga mendukung perkembangbiakannya. Bakteri merupakan zat organik tersuspensi sehingga pertumbuhannya akan meningkatkan kekeruhan air. Air yang keruh yang mengandung zat tersuspensi sulit didesinfeksi, karena mikroba terlindung oleh zat tersuspensi, hal ini akan sangat berbahaya bagi kesehatan, bila mikroba itu adalah patogen (Slamet, 2004). Padatan tersuspensi total atau *total suspended solid* (TSS) adalah jumlah bobot bahan tersuspensi dalam volume air tertentu pada suatu sampel air, biasanya diberikan dalam miligram per liter atau bagian per juta (ppm). TSS dalam air dapat diukur melalui pengukuran kekeruhan air (turbiditas) untuk memperkirakan padatan tersuspensi total dalam sampel air dengan alat turbidimeter. Konsentrasi padatan tersuspensi dalam air yang tinggi akan mengurangi penetrasi sinar matahari ke dalam air sehingga mempengaruhi regenerasi oksigen secara fotosintesis.

Padatan terlarut adalah padatan yang mempunyai ukuran lebih kecil dari padatan tersuspensi. Padatan terlarut pada umumnya terdiri dari senyawa-senyawa anorganik dan organik yang larut dalam air, mineral dan garam-garaman. Air buangan industri biasanya mengandung berbagai zat yang terlarut yang berbahaya bagi kesehatan. Air buangan rumah tangga dan industri pencucian biasanya mengandung sabun, deterjen dan surfaktan yang larut dalam air. Beberapa polutan logam berat yang sering mencemari air buangan dan sangat berbahaya bagi kehidupan disekitarnya misalnya merkuri dan timbal (Fardiaz, 1992).

## **2.12. Lebar, Kedalaman, Kecepatan Aliran dan Debit Air Sungai**

Lebar dan kedalaman berpengaruh pada karakteristik fisik, kimia dan biologis sungai. Sungai yang lebar dan dangkal akan mendapatkan cahaya

matahari lebih banyak sehingga suhu meningkat, yang berakibat menurunnya jumlah oksigen terlarut. Kecepatan aliran sungai dipengaruhi oleh lebar dan kedalamannya, dimana sungai yang lebar dan dalam akan memiliki kecepatan aliran yang besar. Dalam air deras konsentrasi oksigen terlarut mencapai kejenuhan (melimpah), sehingga dalam air deras biasanya oksigen bukan menjadi faktor pembatas (indikator) pencemaran air. Jika air berjalan lambat atau ada pencemar maka oksigen yang terlarut mungkin di bawah kejenuhan, sehingga oksigen dalam kondisi ini menjadi faktor pembatas pencemaran.

Debit merupakan jumlah air yang mengalir di dalam saluran atau sungai per satuan (unit) waktu. Debit air berhubungan erat dengan kecepatan aliran, lebar dan kedalaman sungai. Secara intuisi dalam keadaan normal, pada sungai yang dalam, lebar dan dengan aliran yang deras akan memiliki konsentrasi oksigen terlarut yang tinggi. Semakin deras aliran sungai akan meningkatkan debit, sehingga semakin besar debit air sungai maka jumlah oksigen terlarut atau *dissolved oxygen* (DO) semakin besar.

### **2.13. Indikator Pencemaran Air COD, DO dan Fosfat**

Indikator yang umum digunakan dalam mendeteksi pencemaran air yang disebabkan oleh limbah organik adalah indikator BOD, COD dan DO. Oksigen terlarut atau *dissolved oxygen* (DO) merupakan kebutuhan dasar bagi kehidupan hewan dan tumbuhan di dalam air. Kehidupan makhluk hidup di dalam air tergantung dari kemampuan air untuk mempertahankan konsentrasi oksigen minimal yang dibutuhkan untuk kehidupannya. Konsentrasi oksigen terlarut minimal untuk kehidupan biota tidak boleh kurang dari 6 ppm (Fardiaz, 1992). Oksigen terlarut dapat berasal dari proses fotosintesis tanaman air yang konsentrasinya tergantung dari jumlah tumbuhan air. Oksigen terlarut juga berasal dari atmosfer (udara) yang masuk dalam air dengan kecepatan terbatas. Adanya bahan pencemar atau berubahnya sifat fisik air akan menurunkan DO, sehingga DO dapat digunakan indikator adanya bahan pencemar dalam air. Konsentrasi oksigen terlarut bergantung pada suhu, jumlah tumbuhan fotosintesis, tingkat penetrasi cahaya, kederasan aliran air dan jumlah bahan organik yang diuraikan dalam air (seperti sampah, ganggang mati atau limbah industri). Tingkat penetrasi

cahaya bergantung pada kedalaman dan kekeruhan air. Peningkatan jumlah bahan buangan organik dalam air dapat meningkatkan jumlah bakteri pengurai aerobik, sehingga konsumsi oksigen oleh bakteri untuk menguraikan bahan-bahan organik meningkat, dan sebaliknya sisa oksigen terlarut (DO) menurun. Kenaikan suhu air akan menurunkan kelarutan oksigen dalam air yang ditandai meningkatnya kecepatan pernafasan organisme perairan, atau kenaikan suhu akan meningkatkan kebutuhan oksigen dan menurunkan konsentrasi oksigen dalam air (Achmad, 2004)

*Biochemical oxygen demand* atau BOD menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang dibutuhkan oleh organisme hidup untuk memecah atau mengoksidasi bahan-bahan buangan (zat organik) di dalam air. Nilai BOD tidak menunjukkan jumlah bahan organik yang sebenarnya, tetapi hanya mengukur secara relatif jumlah oksigen yang dibutuhkan untuk mengoksidasi bahan-bahan buangan. Air yang sedikit mengandung bahan organik, maka bakteri pengurai aerob mudah memecahkan tanpa mengganggu keseimbangan oksigen dalam air. Sebaliknya, air yang banyak mengandung bahan organik, maka bakteri pengurai aerob akan berkembang berlipat ganda karena banyak makanan, dan kondisi ini akan meningkatkan konsumsi oksigen (BOD) dan menurunkan sisa DO.

*Chemical oxygen demand* atau COD adalah kebutuhan oksigen pada oksidasi kimiawi, yaitu menunjukkan jumlah oksigen yang dikonsumsi bahan oksidan seperti kalium dikromat untuk mengoksidasi bahan-bahan limbah organik di dalam air. Selain kalium dikromat, bakteri anaerob juga dapat mengoksidasi zat organik menjadi gas karbondioksida dalam air. Jumlah bahan organik di dalam air dapat diketahui melalui uji COD. Semakin banyak bahan organik dalam air akan meningkatkan COD (Sastrawijaya, 2009). Batas baku mutu air sungai menurut golongan B yang layak sebagai air baku untuk produksi air minum adalah DO minimal 4 ppm (*part per-million*) atau bagian per-sejuta, BOD maksimum adalah 6 ppm dan COD maksimum adalah 10 ppm (Amsyari, 1996).

Senyawa fosfat dalam ekosistem air terdapat dalam tiga bentuk yaitu senyawa fosfor anorganik seperti ortofosfat ( $\text{PO}_4^{3-}$ ), senyawa organik dalam protoplasma dan sebagai senyawa organik terlarut yang terbentuk karena kotoran

atau tubuh organisme yang mengurai. Kandungan fosfat dalam air dalam keadaan normal mengikuti daur fosfor (fosfor). Fitoplankton dan tanaman air lain akan mengabsorpsi fosfat dan membentuk senyawa adenosine trifosfat (ATP), dimana ATP terdapat dalam sel makhluk hidup yang berperan dalam penyediaan energi, dan herbivora yang memakan tanaman air akan memperoleh fosfat itu. Jika tanaman air atau herbivora mati maka bakteri pengurai mengembalikan fosfat itu ke dalam air sebagai zat organik terlarut, begitu seterusnya.

Peningkatan senyawa fosfat dalam air mendorong kegiatan pengikatan nitrogen (eutrofikasi) oleh ganggang biru yang mengakibatkan tumbuh suburnya ganggang dan enceng gondok. Ganggang biru tumbuh subur di dalam air yang banyak mengandung bahan buangan pupuk fosfat atau pupuk nitrogen. Kenaikan konsentrasi fosfat dalam air mengindikasikan adanya zat pencemar dalam air (Achmad, 2004). Senyawa fosfat dalam air sungai berasal dari deterjen sisa cucian, limbah industri, kotoran hewan, pupuk yang terlarut, dan sisa tanaman atau hewan yang mati, sehingga peningkatan bahan-bahan tersebut dapat meningkatkan konsentrasi fosfat dalam air sungai (Sastrawijaya, 2009). Pada umumnya lingkungan daerah aliran sungai (DAS) terdapat pemukiman penduduk, industri, area pertanian dan peternakan yang berpotensi menghasilkan bahan buangan yang dapat meningkatkan konsentrasi fosfat dalam air sungai.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)



## BAB 3

### METODE PENELITIAN

Bab ini membahas tahapan penelitian yang terdiri dari tahapan kajian teori dan aplikasi (empiris). Tahapan kajian teori meliputi tahapan penaksiran parameter, pengujian hipotesis parameter regresi model RWM dan GWMWR, serta algoritma program. Tahapan kajian empiris meliputi pemodelan GWMWR, sumber data, lokasi penelitian, teknik sampling, peubah penelitian dan tahapan analisis data. Kajian empiris penelitian ini adalah penerapan model GWMWR pada data indikator pencemaran COD, DO dan PO<sub>4</sub> pada air sungai di Surabaya tahun 2013, dan mengevaluasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR atau FKP indikator pencemaran air.

#### 3.1. Tahapan Penelitian Kajian Teori

Sub bab ini membahas tahapan kajian teori model RWM yang meliputi tahapan penaksiran parameter, tahapan pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak dan kajian teori model GWMWR.

##### 3.1.1. Penaksiran dan Pengujian Hipotesis Parameter Model RWM

Tahapan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM adalah sebagai berikut :

##### 1. Menentukan model RWM

Model RWM dikonstruksi dari fungsi survival bersama distribusi Weibull multivariat yang dikembangkan oleh Lee dan Wen (2009) yang disajikan pada persamaan (2.16), dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi dengan kovariat identik dan parameter regresi non-identik. Model RWM dinyatakan dalam persamaan

$$f(y_1, y_2, \dots, y_m) = \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} (y_k)^{(\gamma_k/a)-1} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}\right] A^{a-m} \times \right. \\ \left. \exp[-A^a] \left( \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A^{(\ell-1)a} \right) \right),$$

dengan  $C(m, \ell, a)$  didefinisikan pada persamaan (2.15),

$$A = \sum_{k=1}^m (y_k)^{\frac{\gamma_k}{a}} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i\right],$$

dimana  $\boldsymbol{\beta}_k = [\beta_{k0} \ \beta_{k1} \ \cdots \ \beta_{kp}]^T$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  dan  $\mathbf{x}_i = [1 \ X_{1i} \ X_{2i} \ \cdots \ X_{pi}]^T$ .

2. Penaksiran parameter model RWM menggunakan metode MLE dengan tahapan sebagai berikut :

- (a) Menetapkan fungsi *likelihood*, yaitu

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} (y_{ki})^{\frac{\gamma_k}{a}-1} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i\right] \right) \right) \left( \prod_{i=1}^n A_i^{a-m} \right) \times \left( \prod_{i=1}^n \exp(-A_i^a) \right) \times \left( \prod_{i=1}^n \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a} \right] \right),$$

dengan  $\boldsymbol{\theta} = [a \ \boldsymbol{\gamma}^T \ \boldsymbol{\beta}^T]^T$ , dimana

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_m]^T; \ \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1^T \ \boldsymbol{\beta}_2^T \ \cdots \ \boldsymbol{\beta}_m^T]^T;$$

$$\boldsymbol{\beta}_k = [\beta_{k0} \ \beta_{k1} \ \cdots \ \beta_{kp}]^T, \ k = 1, 2, \dots, m \text{ dan } \mathbf{x}_i = [1 \ X_{1i} \ X_{2i} \ \cdots \ X_{pi}]^T.$$

- (b) Menetapkan logaritma natural fungsi *likelihood* (*log-likelihood*), yaitu

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta}),$$

dengan

$$L_1(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\ln \gamma_k - \ln a + (\frac{\gamma_k}{a} - 1) \ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i);$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n (a - m) \ln(A_i); \ L_3(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^n A_i^a, \ L_4(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln(Q_i);$$

$$A_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\frac{\gamma_k}{a}} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i\right] \text{ dan } Q_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a}.$$

- (c) Mencari turunan parsial orde pertama dari fungsi *log-likelihood* ( $L(\boldsymbol{\theta})$ )

pada tahap (b) terhadap semua parameter, yaitu

$$\frac{\partial L}{\partial a}, \frac{\partial L}{\partial \gamma_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \gamma_m} \text{ dan } \frac{\partial L}{\partial \beta_{k0}}, \frac{\partial L}{\partial \beta_{k1}}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \beta_{kp}} \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, m.$$

- (d) Mencari turunan parsial orde kedua dari fungsi *log-likelihood*, yaitu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \boldsymbol{\theta}^T}, \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_1 \partial \boldsymbol{\theta}^T}, \dots, \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_m \partial \boldsymbol{\theta}^T} \text{ dan } \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}$$

- (e) Menentukan penaksir parameter dengan metode iterasi Newton-Raphson

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^{*}+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^{*})} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^{*})}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^{*})}),$$

dengan

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial a} & \frac{\partial L}{\partial \gamma_1} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial \gamma_m} & \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}^T \text{ adalah vektor gradien dan}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \end{bmatrix} \text{ adalah matriks Hessian.}$$

### 3. Pengujian hipotesis parameter regresi model RWM

Pengujian hipotesis parameter regresi model RWM meliputi pengujian parameter regresi secara serentak dan parsial. Tahapan pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak (simultan) adalah sebagai berikut :

(1) Menetapkan rumusan hipotesis, yaitu

$$H_0 : \beta_{1h} = \beta_{2h} = \cdots = \beta_{mh} = 0, \quad h = 1, 2, \dots, p$$

$$H_1 : \text{Paling sedikit terdapat satu } \beta_{kh} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad h = 1, 2, \dots, p.$$

(2) Mendefinisikan himpunan parameter di bawah  $H_0$ , yaitu

$$\Omega_0 = \{\mathbf{0}_{(mp \times 1)}^T, \boldsymbol{\theta}_2^T\}, \text{ dengan } \mathbf{0}_{(mp \times 1)} \text{ adalah vektor nol berdimensi } mp, \text{ dimana}$$

$$\boldsymbol{\theta}_2 = [a \quad \boldsymbol{\gamma}^T \quad \boldsymbol{\beta}_0^T]^T \text{ adalah vektor berdimensi } (1 + 2m), \quad \boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \cdots \quad \gamma_m]^T \text{ dan}$$

$$\boldsymbol{\beta}_0 = [\beta_{10} \quad \beta_{20} \quad \cdots \quad \beta_{m0}]^T \text{ masing-masing adalah vektor berdimensi } m.$$

Himpunan parameter di bawah  $H_0$  dapat dinyatakan dalam vektor, yaitu

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [\mathbf{0}_{(mp \times 1)}^T \quad \boldsymbol{\theta}_2^T]^T.$$

(3) Mengambil sampel acak  $Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{mi}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$

(4) Menetapkan fungsi *likelihood* di bawah  $H_0$ , yaitu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega_0) &= \prod_{i=1}^n f(y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{mi} \mid a, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}_0) \\ &= \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} (y_{ki})^{\frac{\gamma_k}{a}-1} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \beta_{k0}\right] \right) \right) \left( \prod_{i=1}^n A_{0i}^{a-m} \right) \times \\ &\quad \left( \prod_{i=1}^n \exp(-A_{0i}^a) \right) \left( \prod_{i=1}^n \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_{0i}^{(\ell-1)a} \right] \right) \end{aligned}$$

dengan

$$A_{0i} = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\frac{\gamma_k}{a}} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \beta_{k0}\right]$$

(5) Mendefinisikan fungsi *log-likelihood* di bawah  $H_0$ , yaitu

$$L(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \ln \mathcal{L}(\Omega_0 | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}),$$

dengan

$$L_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \{ \ln \gamma_k - \ln a + (\frac{\gamma_k}{a} - 1) \ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{a} \beta_{k0} \}$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (a - m) \ln A_i; \quad L_3(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = - \sum_{i=1}^n A_i^a; \quad L_4(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \ln Q_i$$

$$\text{dengan } Q_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a} \quad \text{dan} \quad A_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\gamma_k/a} \exp[-\frac{\gamma_k}{a} \beta_{k0}].$$

- (6) Menentukan maksimum fungsi *likelihood* dan *log-likelihood* di bawah  $H_0$ , yaitu masing-masing adalah

$$\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0) = \max_{\Omega_0} \mathcal{L}(\Omega_0) = \mathcal{L}(\hat{a}_0, \hat{\gamma}_0, \hat{\boldsymbol{\beta}}_{00}) = \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)$$

dan

$$L(\hat{\Omega}_0) = \ln \mathcal{L}(\hat{\Omega}_0) = L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0),$$

- (7) Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi, yaitu

$$\Omega_{rw} = \{\boldsymbol{\beta}^*, \boldsymbol{\theta}_2^T\}, \text{ dengan } \boldsymbol{\beta}^* \text{ adalah vektor berdimensi } mp,$$

$$\boldsymbol{\beta}^* = [\boldsymbol{\beta}_1^{*T} \boldsymbol{\beta}_2^{*T} \cdots \boldsymbol{\beta}_m^{*T}]^T, \text{ dimana } \boldsymbol{\beta}_k^* = [\beta_{k1} \beta_{k2} \cdots \beta_{kp}]^T, \quad k = 1, 2, \dots, m \text{ dan}$$

$$\boldsymbol{\theta}_2 = [a \quad \boldsymbol{\gamma}^T \quad \boldsymbol{\beta}_0^T]^T. \text{ Himpunan parameter di bawah populasi dapat dinyatakan}$$

$$\text{dalam vektor, yaitu } \boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\beta}^{*T} \quad \boldsymbol{\theta}_2^T]^T.$$

- (8) Menetapkan fungsi *likelihood* di bawah populasi, yaitu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega_{rw}) &= \prod_{i=1}^n f(y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{mi} | \Omega_{rw}) \\ &= \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} (y_{ki})^{\frac{\gamma_k}{a}-1} \exp[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i] \right) \right) \left( \prod_{i=1}^n A_i^{a-m} \right) \times \\ &\quad \left( \prod_{i=1}^n \exp(-A_i^a) \right) \left( \prod_{i=1}^n \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a} \right] \right) \end{aligned}$$

- (9) Menentukan fungsi *log-likelihood* di bawah populasi, yaitu

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$$

dengan

$$L_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \{ \ln \gamma_k - \ln a + (\frac{\gamma_k}{a} - 1) \ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i \}$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (a - m) \ln A_i ; \quad L_3(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = - \sum_{i=1}^n A_i^a$$

$$L_4(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \ln Q_i, \text{ dengan } Q_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a}$$

$$A_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\gamma_k/a} \exp[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i] .$$

- (10) Menentukan maksimum fungsi *likelihood* dan *log-likelihood* di bawah populasi, yaitu masing-masing adalah

$$\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw}) = \max_{\Omega_{rw}} \mathcal{L}(a, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = \mathcal{L}(\hat{a}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) \text{ dan}$$

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = L(\hat{\Omega}_{rw}) = \ln \mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})$$

- (11) Menentukan statistik uji dengan tahapan sebagai berikut :

- (a) Menyelesaikan statistik *likelihood ratio*, yaitu

$$\tau(\mathbf{y}) = \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})},$$

$$\text{dengan } \mathcal{L}(\hat{\Omega}_0) = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) \text{ dan } \mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw}) = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_{rw}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}).$$

- (b) Statistik *likelihood ratio* (LR) pada tahap (a) ekuivalen dengan statistik

$$G_n = -2 \ln \left[ \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})} \right] = 2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)),$$

$$\text{dengan } L(.) = \ln \mathcal{L}(.)$$

- (12) Menentukan distribusi statistik  $G_n$  dengan tahapan sebagai berikut :

- (a) Mengembangkan  $L(\boldsymbol{\theta})$  ke dalam deret Taylor di sekitar  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , dan diperoleh hubungan

$$2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\boldsymbol{\theta})) = (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}).$$

- (b) Membuktikan sifat asimtotik kenormalan dari  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , yakni

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}) ; \quad (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}) \text{ dan}$$

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{b^*})$$

dengan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  adalah penaksir ML dari parameter model RWM.

- (c) Menentukan distribusi bentuk kuadrat  $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ , dan didapat

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \chi_{b^*}^2,$$

dengan  $b^* = m(p + 2) + 1$ , yaitu banyaknya parameter model RWM.

- (d) Berdasarkan tahap 12(a), bahwa statistik LR pada tahap 11(b) dapat dinyatakan dalam bentuk kuadrat, yaitu

$$\begin{aligned} G_n &= 2(L(\hat{\Omega}_{rw}) - L(\hat{\Omega}_0)) \\ &= 2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0)^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \end{aligned}$$

- (e) Menentukan distribusi statistik  $G_n$

Berdasarkan definisi himpunan parameter di bawah  $H_0$  dan di bawah populasi, serta berdasarkan hipotesis nol bahwa  $\boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{0}_{(mp \times 1)}$ , maka dari tahapan (d) didapat

$$\begin{aligned} G_n &= 2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_{10})^T [\mathbf{I}^{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_{10}) \\ &= \boldsymbol{\beta}^{*T} [\mathbf{I}^{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} \boldsymbol{\beta}^* \\ &= \left[ [\mathbf{I}^{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1/2} \boldsymbol{\beta}^* \right]^T \left[ [\mathbf{I}^{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1/2} \boldsymbol{\beta}^* \right] \\ &= \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \xrightarrow{d} \chi_{mp}^2, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

dimana

$$[\mathbf{I}^{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] = \text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) \text{ dan } \mathbf{Z} = [\mathbf{I}^{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1/2} \boldsymbol{\beta}^* \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{mp}), n \rightarrow \infty.$$

$[\mathbf{I}^{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]$  adalah matriks partisi dari matriks  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}$ , yakni

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}^{11}] & [\mathbf{I}^{12}] \\ [\mathbf{I}^{21}] & [\mathbf{I}^{22}] \end{bmatrix} \text{ dan } mp \text{ adalah dimensi vektor } \boldsymbol{\beta}^* \text{ atau selisih}$$

antara banyaknya parameter pada himpunan  $\Omega_{rw}$  dan  $\Omega_0$ .

- (13) Menentukan daerah penolakan  $H_0$  berdasarkan definisi uji LR (LRT) :

- (a) Menentukan daerah penolakan uji LR

Uji LR adalah suatu uji yang menolak  $H_0$ , jika

$$\tau(\mathbf{y}) = \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})} < c_\alpha; 0 < c_\alpha \leq 1.$$

- (b) Menentukan nilai konstanta  $c_\alpha$  yang bergantung pada taraf uji  $\alpha$ , dan memenuhi  $P_{\theta \in \Omega_0}(\tau(\mathbf{y}) < c_\alpha) = \alpha$
- (c) Berdasarkan nilai  $c_\alpha$  pada tahap (b) dan berdasarkan definisi taraf uji  $\alpha$  didapat daerah penolakan pengujian parameter regresi model RWM secara serentak, yaitu menolak  $H_0$ , jika  $G_n > \chi^2_{(\alpha, mp)}$ .

### 3.1.2. Penaksiran Parameter Model GWMWR

Tahapan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR adalah sebagai berikut :

1. Menentukan model GWMWR

Model GWMWR pada lokasi  $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$  adalah model RWM dengan semua parameter bergantung pada lokasi geografis. Model GWMWR pada lokasi  $\mathbf{u}_i$  adalah

$$f(y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{mi}) = \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} (y_{ki})^{\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} - 1} \exp\left[-\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i\right] \right) \times \\ [\mathcal{A}_i(\mathbf{u}_i)]^{a(\mathbf{u}_i) - m} \exp\left(-[\mathcal{A}_i(\mathbf{u}_i)]^{a(\mathbf{u}_i)}\right) \times \\ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a(\mathbf{u}_i)) (\mathcal{A}_i(\mathbf{u}_i))^{(\ell-1)a(\mathbf{u}_i)},$$

dengan

$$\mathcal{A}_i(\mathbf{u}_i) = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)}} \exp\left[-\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i\right];$$

$$\mathbf{x}_i = [1 \ X_{1i} \ X_{2i} \ \dots \ X_{pi}]^T$$

dan

$$\boldsymbol{\beta}_k(\mathbf{u}_i) = [\beta_{k0}(\mathbf{u}_i) \ \beta_{k1}(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \beta_{kp}(\mathbf{u}_i)]^T \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, m.$$

2. Penaksiran parameter model GWMWR pada setiap lokasi menggunakan metode MLE, dengan tahapan

- (a) Menetapkan fungsi *likelihood* model GWMWR pada lokasi ke- $i$ , yaitu

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \prod_{j=1}^n f(y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj} | a(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) \\ = \dots$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = & \left( \prod_{j=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} (y_{kj})^{\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} - 1} \exp\left[-\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j\right] \right) \right) \times \\ & \left( \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j(\mathbf{u}_i))^{a(\mathbf{u}_i) - m} \right) \left( \prod_{j=1}^n \exp\left(-[\mathcal{A}_j(\mathbf{u}_i)]^{a(\mathbf{u}_i)}\right) \right) \times \\ & \left( \prod_{j=1}^n \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a(\mathbf{u}_i)) [\mathcal{A}_j(\mathbf{u}_i)]^{(\ell-1)a(\mathbf{u}_i)} \right] \right) \end{aligned}$$

- (b) Menentukan pembobot spasial (pembobot faktor lokasi geografis)

Pembobot spasial pada penaksiran parameter model GWMWR ditentukan menggunakan fungsi pembobot, yang dipilih satu dari tiga fungsi pembobot Gauss adaptif, *bi-square* adaptif dan *tricube* adaptif, yang memberikan model terbaik, yaitu model GWMWR yang memberikan nilai BIC minimum.

- (c) Menentukan *log-likelihood* dengan pembobotan spasial, yaitu

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) &= \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))(w_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^n w_{ij} [\ln f(y_{1j}, \dots, y_{mj} | a(\mathbf{u}_i), \gamma(\mathbf{u}_i), \beta(\mathbf{u}_i))] \\ &= \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}), \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} L_1((\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m w_{ij} \left( \ln \gamma_k(\mathbf{u}_i) - \ln a(\mathbf{u}_i) + \left( \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} - 1 \right) \ln y_{kj} \right) - \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m w_{ij} \left( \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j \right) \end{aligned}$$

$$L_2((\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) = \sum_{j=1}^n w_{ij} (a(\mathbf{u}_i) - m) \ln(\mathcal{A}_j(\mathbf{u}_i)) ;$$

$$L_3((\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) = - \sum_{i=1}^n w_{ij} [\mathcal{A}_j(\mathbf{u}_i)]^{a(\mathbf{u}_i)} ;$$

$$L_4((\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) = \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln[\mathcal{Q}_j(\mathbf{u}_i)] ;$$

$$\mathcal{Q}_j(\mathbf{u}_i) = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a(\mathbf{u}_i)) [\mathcal{A}_j(\mathbf{u}_i)]^{(\ell-1)a(\mathbf{u}_i)} .$$

- (d) Mencari turunan parsial orde pertama dari fungsi *log-likelihood*



$$\frac{\partial L(\mathbf{u}_i)}{\partial a(\mathbf{u}_i)}, \frac{\partial L(\mathbf{u}_i)}{\partial \gamma_1(\mathbf{u}_i)}, \dots, \frac{\partial L(\mathbf{u}_i)}{\partial \gamma_m(\mathbf{u}_i)}$$

dan

$$\frac{\partial L(\mathbf{u}_i)}{\partial \beta_{k0}(\mathbf{u}_i)}, \frac{\partial L(\mathbf{u}_i)}{\partial \beta_{k1}(\mathbf{u}_i)}, \dots, \frac{\partial L(\mathbf{u}_i)}{\partial \beta_{kp}(\mathbf{u}_i)}, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, m.$$

- (e) Mencari turunan parsial orde kedua dari fungsi *log-likelihood*

$$\frac{\partial^2 L(\mathbf{u}_i)}{\partial a(\mathbf{u}_i) \partial \theta(\mathbf{u}_i)}, \frac{\partial^2 L(\mathbf{u}_i)}{\partial \gamma_1(\mathbf{u}_i) \partial \theta^T(\mathbf{u}_i)}, \dots, \frac{\partial^2 L(\mathbf{u}_i)}{\partial \gamma_m(\mathbf{u}_i) \partial \theta^T(\mathbf{u}_i)}$$

dan

$$\frac{\partial^2 L(\mathbf{u}_i)}{\partial \beta(\mathbf{u}_i) \partial \theta^T(\mathbf{u}_i)}$$

- (f) Menentukan penaksir parameter dengan metode iterasi Newton-Raphson

$$\hat{\theta}(\mathbf{u}_i)^{(q^{*}+1)} = \hat{\theta}(\mathbf{u}_i)^{(q^{*})} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}(\mathbf{u}_i)^{(q^{*})}) \mathbf{g}(\hat{\theta}(\mathbf{u}_i)^{(q^{*})}).$$

### 3.1.3. Tahapan Pembuatan Algoritma

Proses penghitungan (komputasi) penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM dan GWMWR dilakukan secara numerik dengan program komputasi. Pembuatan program komputasi dapat dilakukan dengan benar berdasarkan algoritma. Algoritma merupakan tahapan dan prosedur sistematis dan logis pada analisis data atau proses komputasi secara numerik. Algoritma berfungsi sebagai pemandu proses analisis data atau pembuatan program. Algoritma penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM disajikan pada Bab 4, dan algoritma penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR disajikan pada Bab 5.

### 3.2. Tahapan Penelitian Kajian Empiris

Tahapan ini membahas penerapan model RWM dan GWMWR pada data indikator pencemaran air COD, DO dan PO<sub>4</sub>, dan menentukan faktor-faktor yang mempengaruhi model RWM dan model GWMWR. Tahapan penerapan model RWM dan GWMWR pada data indikator pencemaran COD, DO dan PO<sub>4</sub> air sungai di Surabaya tahun 2013 adalah sebagai berikut :

### **3.2.1. Sumber Data**

Data penelitian ini adalah data sekunder, dengan sumber data adalah Laporan Kegiatan Pengawasan dan Pengendalian Dampak Lingkungan Tahun 2013 dari Badan Lingkungan Hidup Kota Surabaya, yang terdiri dari :

- (1) Peta lokasi pemantauan air badan air tahun 2013 atau peta titik sampel air badan air tahun 2013.
- (2) Data COD, DO, konsentrasi  $PO_4$ , kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen, total padatan tersuspensi (TSS) pada air badan air (sungai, waduk atau bozem) di Surabaya tahun 2013.
- (3) Data spasial berupa koordinat (letak lintang-bujur) lokasi pengamatan atau titik-titik sampel air badan air tahun 2013.

### **3.2.2. Lokasi Penelitian dan Teknik Sampling**

Lokasi penelitian ini meliputi :

- (1) Badan Lingkungan Hidup Kota Surabaya
- (2) Pogram Studi S3, Departemen Statistika ITS Surabaya.

Teknik sampling penelitian ini adalah teknik sampling pertimbangan (*purposive*), dimana sampel diambil berdasarkan pertimbangan aliran air dan waktu pengamatan, yaitu sampel pada pengamatan waktu tertentu. Sampel penelitian ini adalah air badan air di Surabaya yang sealiran atau mengalir pada satu aliran. Waktu pengamatan sampel dilakukan pada bulan Juli, September dan Nopember 2013. Titik sampel dan lokasi pengamatan diasumsikan dipilih secara acak, dengan memperhatikan dimensi jarak titik sampel dari tepi badan air dan kedalaman titik sampel dari permukaan air. Data pengamatan penelitian ini adalah data sekunder dan diasumsikan bahwa COD, DO, konsentrasi  $PO_4$ , konsentrasi deterjen dan TSS di sekitar lokasi pengamatan (titik sampel) adalah homogen.

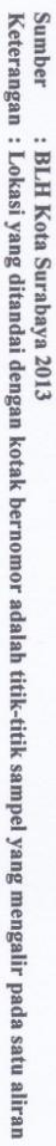
Ukuran sampel penelitian ini adalah 27, merupakan hasil pengamatan di 9 lokasi, yaitu hasil pengamatan pada bulan Juli, bulan September dan bulan Nopember 2013 masing-masing 9 data. Data sampel peneltian ini adalah hasil pengamatan pengulangan selama tiga bulan dan diasumsikan pengamatan bulan pertama kedua dan ketiga adalah saling bebas. Data lokasi titik sampel dan koordinat lokasi pengamatan (letak garis lintang-bujur) disajikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Lokasi Pengamatan

No	Nama badan air	Nomor Lokasi	Lokasi Titik Sampel dan Koordinatnya
1	Kali Surabaya	1	Kali Surabaya di Jl. Kedurus (7°19'21,87" LS dan 112°42'36,57" EL)
2	Kali Surabaya	2	Kali Surabaya di Jembatan Wonokromo (7°17'59,02" LS dan 112°44'15,46" EL)
3	Kali Mas	3	Kali Mas di Jembatan Ngagel (7°17'48,81" LS dan 112°44'30,45" EL)
4	Kali Mas	4	Kali Mas di Jembatan Keputran Selatan (7°16'38,31" LS dan 112°44'38,72" EL)
5	Kali Mas	5	Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo (7°14'35,12" LS dan 112°44'22,66" EL)
6	Saluran Darmo	18	Saluran Darmo di Pompa air Darmo Kali (7°17'21,11" LS dan 112°44'21,43" EL)
7	Bozem Kedurus	24	Bozem Kedurus (7°19'18,67" LS dan 112°42'9,22" EL)
8	Kali Makmur	25	Kali Makmur di Lidah Kulon (7°18'53,73" LS dan 112°39'7,21" EL)
9	Kali Banyu Urip	26	Kali Banyu Urip di Pompa Gunungsari (7°18'23,90" LS dan 112°43'11,22" EL)

Sumber : Badan Lingkungan Hidup Kota Surabaya 2013

Berdasarkan lokasi titik sampel atau lokasi pemantauan air badan air pada Tabel 3.1, pengamatan dilakukan di 9 lokasi pada air badan air yang sealiran, yaitu pada Kali Surabaya, Kali Mas, Kali Makmur, Kali Banyu Urip di Pompa Air Gunungsari, Bozem Kedurus dan Saluran Darmo. Lokasi pengamatan pada Kali Surabaya sebanyak dua titik, yaitu di Jl. Kedurus dan Jembatan Wonokromo. Pengamatan pada Kali Mas di tiga lokasi, yaitu di Jembatan Ngagel, Jembatan Keputran Selatan dan di Jembatan Kebon Rojo. Ukuran sampel penelitian ini adalah 27 merupakan hasil pengamatan pengulangan tiga kali, yaitu pada bulan Juli, september dan Nopember 2013, di 9 lokasi seperti diberikan pada Tabel 3.1. Berdasarkan metode GWR, penaksiran parameter model GWMWR dilakukan secara lokal pada setiap lokasi pengamatan, yaitu pada 9 lokasi dan pada penelitian ini menggunakan 27 data pengamatan. Peta lokasi titik sampel atau lokasi pemantauan air badan air tahun 2013 disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Lokasi Pemantauan (Titik Sampel) Air Badan Air Tahun 2013

### 3.2.3. Peubah Penelitian

Peubah atau variabel penelitian terdiri dari peubah tak bebas atau respon ( $Y$ ) dan peubah bebas (prediktor) atau kovariat ( $X$ ). Respon penelitian ini adalah COD, DO dan konsentrasi  $PO_4$  air badan air (sungai atau bozem). Kovariat penelitian ini dibatasi sebanyak empat dengan pertimbangan ukuran sampel yang relatif kecil. Kovariat penelitian ini adalah kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen dan konsentrasi TSS. Unsur spasial yang digunakan pada penelitian ini adalah unsur spasial tipe titik yang dinyatakan dalam koordinat lokasi (titik). Koordinat  $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$  menyatakan letak geografis titik sampel ke- $i$ , dengan  $u_{1i}$  menyatakan posisi garis lintang dan  $u_{2i}$  menyatakan posisi garis bujur. Respon dan kovariat penelitian berserta satuan pengukuran dan notasinya disajikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Peubah Penelitian dan Satuan Pengukurannya

Notasi	Peubah	Jenis Peubah	Satuan
$Y_1$	COD	Respon	mg/l
$Y_2$	DO	Respon	mg/l
$Y_3$	$PO_4$	Respon	mg/l
$X_1$	Kecepatan aliran air	Kovariat	m/dt
$X_2$	Debit air	Kovariat	l/dt
$X_3$	Konsentrasi deterjen	Kovariat	mg/l
$X_4$	<i>Total Suspended Solid</i> (TSS)	Kovariat	mg/l

Struktur data pengamatan yang meliputi data respon COD ( $Y_1$ ), DO ( $Y_2$ ) dan konsentrasi  $PO_4$  ( $Y_3$ ), data kovariat yaitu kecepatan aliran air ( $X_1$ ), debit air ( $X_2$ ), konsentrasi deterjen ( $X_3$ ), TSS ( $X_4$ ) dan koordinat titik sampel  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{27}$  dengan  $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$  disajikan pada Tabel 3.3.

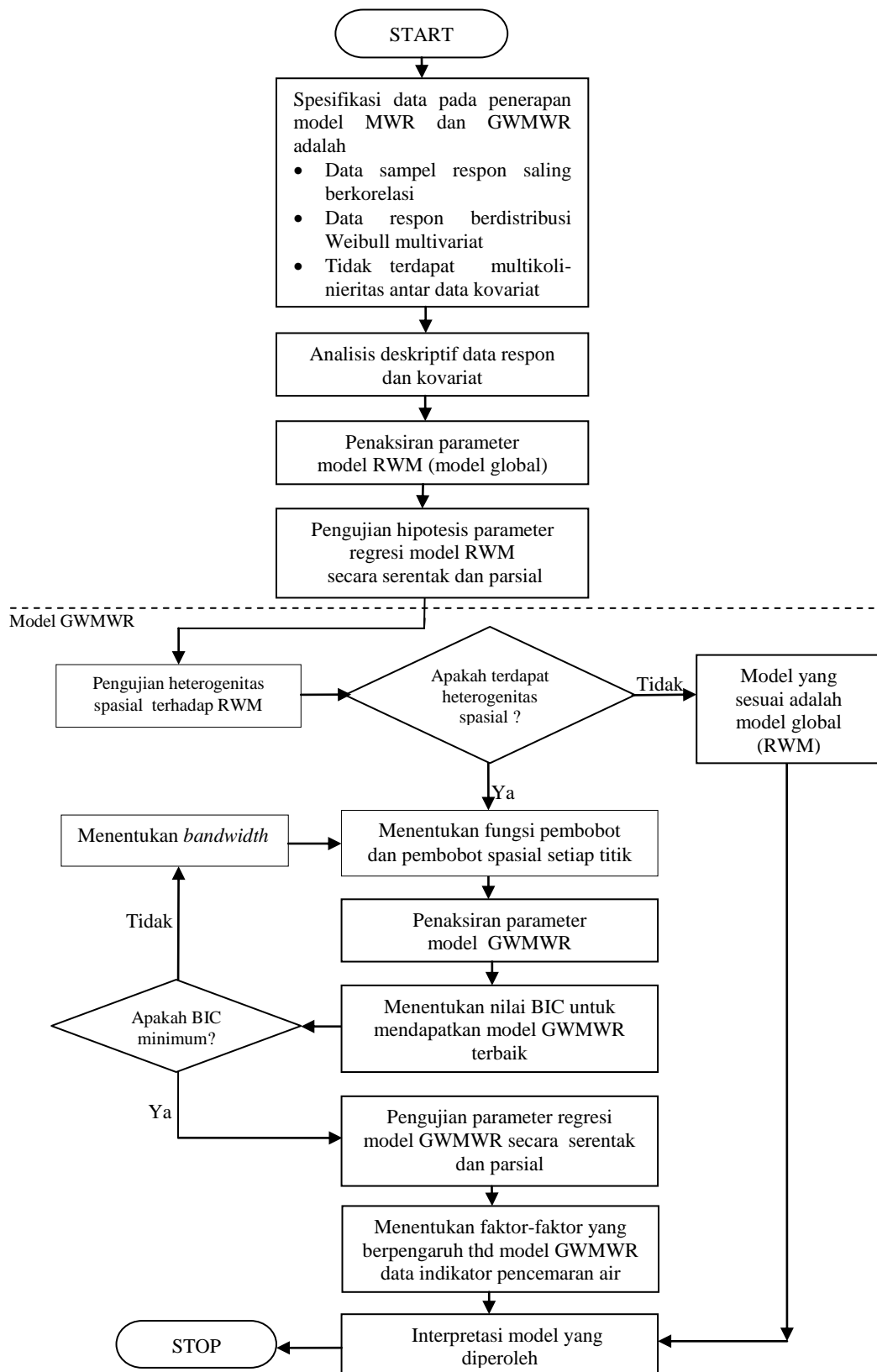
Tabel 3.3 Struktur Data Pengamatan Model GWMWR

$i$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$\mathbf{u}_i$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$
1	$X_{11}$	$X_{21}$	$X_{31}$	$X_{41}$	$\mathbf{u}_1$	$y_{11}$	$y_{21}$	$y_{31}$
2	$X_{12}$	$X_{22}$	$X_{32}$	$X_{42}$	$\mathbf{u}_2$	$y_{12}$	$y_{22}$	$y_{32}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
27	$X_{1.27}$	$X_{2.27}$	$X_{3.27}$	$X_{4.27}$	$\mathbf{u}_{27}$	$y_{1.27}$	$y_{2.27}$	$y_{3.27}$

### 3.2.4. Tahapan Analisis Data

Sub-bab ini membahas tahapan analisis data pada penerapan model RWM dan GWMWR pada data indikator pencemaran air. Tahapan analisis data dirangkum dalam diagram alir, yang disajikan pada Gambar 3.2. Data penelitian telah memenuhi spesifikasi untuk diterapkan pada model RWM dan GWMWR. Data sampel respon telah dilakukan pengujian distribusi multivariat dan data kovariat telah dilakukan pendeteksian multikolinieritas. Data sampel respon dan kovariat telah memenuhi asumsi-asumsi model RWM, yaitu data respon COD, DO dan  $\text{PO}_4$  berdistribusi Weibull multivariat dan saling berkorelasi, serta tidak terdapat multikolinieritas antar data kovariat. Tahapan analisis data penelitian ini adalah

- (1) Melakukan analisis deskriptif data respon ( $Y$ ) dan data kovariat ( $X$ ).  
Analisis deskriptif untuk memperoleh gambaran awal data respon dan kovariat melalui penghitungan nilai statistik *mean*, simpangan baku, nilai maksimum minimum dan nilai koefisien variasi.
- (2) Menentukan penaksir parameter model RWM atau model regresi Weibull trivariat (RWT) menggunakan metode MLE.
- (3) Pengujian hipotesis parameter regresi model RWM terdiri dari pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak dan parsial. Statistik uji pangujian parameter regresi model RWM secara serentak adalah statistik Wilk's *likelihood ratio* dan statistik uji pengujian parameter regresi model RWM secara parsial adalah statistik Wald yang diberikan oleh persamaan (2.30).



Gambar 3.2 Diagram Alir Tahapan Analisis Data

- (4) Pengujian heterogenitas spasial terhadap model RWM.

Pengujian heterogenitas spasial bertujuan untuk mengetahui apakah model RWM bergantung pada lokasi geografis. Hipotesis pengujian heterogenitas spasial disajikan pada persamaan (2.51) dan statistik uji diberikan oleh persamaan (2.53).

- (5) Menentukan *bandwidth*, fungsi pembobot, dan pembobot spasial pada setiap titik. Fungsi pembobot adalah fungsi Gauss adaptif, *bi-square* adaptif dan *tri-cube* adaptif.
- (6) Menentukan penaksir parameter model GWMWR data indikator pencemaran air pada setiap lokasi pengamatan.
- (7) Menentukan nilai BIC untuk mendapatkan model GWMWR data indikator pencemaran air terbaik. Model GWMWR pada data indikator pencemaran air terbaik dipilih dari hasil-hasil penaksiran parameter menggunakan ketiga fungsi pembobot spasial (fungsi Gauss adaptif, *bi-square* adaptif dan *tri-cube* adaptif) yang memberikan nilai BIC minimum.
- (8) Pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR.
- Pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR data indikator pencemaran air COD, DO dan  $PO_4$  terdiri dari pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak dan parsial. Pengujian kesamaan model GWMWR dan RWM tidak dilakukan dan diasumsikan model GWMWR dan model RWM tidak identik. Statistik pengujian parameter regresi model GWMWR secara serentak diberikan oleh persamaan (2.35) dan statistik uji pengujian parameter regresi secara parsial diberikan oleh persamaan (2.36).
- (9) Menentukan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR data indikator pencemaran air COD, DO dan  $PO_4$  pada air sungai di Surabaya.
- (10) Penginterpretasian model GWMWR.

Proses penghitungan (komputasi) pada tahapan analisis data, khususnya pada tahapan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM dan GWMWR dilakukan secara numerik menggunakan program. Pembuatan program komputasi dilakukan karena tingkat kompleksitas yang cukup tinggi dan belum tersedia *software* aplikasi statistika atau matematika untuk menyelesaikan permasalahan model RWM dan model GWMWR. Program yang



dibuat pada penelitian ini adalah program Matlab. Program Matlab untuk penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM dan GWMWR disajikan pada Lampiran 8, 9 dan 10.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

## BAB 4

### PENAKSIRAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MODEL REGRESI WEIBULL MULTIVARIAT

Bab ini membahas penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM. Bagian awal bab ini membahas penaksiran parameter FKP bersama distribusi Weibull multivariat yang dikembangkan oleh Lee dan Wen (2009). Pembahasan selanjutnya adalah model umum RWM, penaksiran parameter dan algoritma penaksiran parameter model RWM. Bagian akhir bab ini membahas pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak dan algoritma pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak.

#### 4.1. Penaksiran Parameter FKP Distribusi Weibull Multivariat

Model umum FKP bersama distribusi Weibull multivariat yang dikemukakan oleh Lee dan Wen (2009) telah dibahas pada bab 2. FKP bersama distribusi Weibull multivariat diperoleh melalui penurunan parsial fungsi survival bersama (2.16) terhadap semua peubah dengan menggunakan hubungan (2.17). Pada sub-bab ini dibahas penaksiran parameter FKP bersama distribusi Weibull multivariat yang diperlukan dalam pengujian distribusi Weibull multivariat. Model FKP bersama distribusi Weibull multivariat yang dikembangkan oleh Lee dan Wen (2009) pada persamaan (2.14) dapat ditulis dalam bentuk

$$f_1(y_1, y_2, \dots, y_m) = \left( \prod_{k=1}^m \left( \frac{1}{a} \right) \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a} - 1} \right) Q_m^* \exp[-A_1^a], \quad (4.1)$$

dengan

$$Q_m^* = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_1^{\ell a - m}$$

$C(m, \ell, a)$  adalah koefisien faktorial tergeneralisir yang didefinisikan pada persamaan (2.15). Jumlahan (notasi sigma) untuk penentuan  $C(m, \ell, a)$  pada persamaan (2.15) dijalankan melalui semua bilangan bulat non-negatif yang

merupakan solusi dari sistem persamaan  $\sum_{k=1}^m \ell_k = \ell$  dan  $\sum_{k=1}^m k\ell_k = m$ . Solusi sistem

persamaan  $\sum_{k=1}^m \ell_k = \ell$  dan  $\sum_{k=1}^m k\ell_k = m$  untuk  $m=2$  dan  $m=3$  (pada kasus bivariat

dan trivariat) adalah unik (tunggal) untuk semua nilai  $\ell$ , tetapi pada kasus  $m \geq 4$ , solusi sistem persamaan tersebut tidak tunggal untuk nilai  $\ell$  tertentu. Sebagai ilustrasi, berikut ini dibahas penentuan  $Q_3^*$  dan  $Q_4^*$  yang diberikan oleh persamaan (4.1) pada kasus 3-variat ( $m=3$ ) dan 4-variat ( $m=4$ ).

Tahap awal penentuan  $Q_3^*$  pada kasus 3-variat adalah menentukan polinomial  $C(3,1,a)$ ,  $C(3,2,a)$  dan  $C(3,3,a)$ , sebagai berikut

a. Solusi sistem persamaan  $\sum_{k=1}^3 \ell_k = \ell$  dan  $\sum_{k=1}^3 k\ell_k = 3$  untuk  $\ell=1$  adalah

$\ell_1 = \ell_2 = 0$ ,  $\ell_3 = 1$ , dan berdasarkan definisi pada (2.15) didapat

$$\begin{aligned} C(3,1,a) &= P_{0,0,1}^3 \prod_{k=1}^3 \binom{a}{k}^{\ell_k} = \frac{3!}{0!0!1!} \binom{a}{1}^0 \binom{a}{2}^0 \binom{a}{3}^1 = 3! \frac{a!}{3!(a-3)!} \\ &= a(a-1)(a-2). \end{aligned}$$

b. Solusi sistem persamaan  $\sum_{k=1}^3 \ell_k = \ell$  dan  $\sum_{k=1}^3 k\ell_k = 3$  untuk  $\ell=2$  adalah

$\ell_1 = \ell_2 = 1$ ,  $\ell_3 = 0$ , sehingga

$$\begin{aligned} C(3,2,a) &= P_{1,1,0}^3 \prod_{k=1}^3 \binom{a}{k}^{\ell_k} = \frac{3!}{1!1!0!} \binom{a}{1}^1 \binom{a}{2}^1 \binom{a}{3}^0 = 3! \frac{a!}{(a-1)!} \times \frac{a!}{2!(a-2)!} \\ &= 3a^2(a-1). \end{aligned}$$

c. Solusi sistem persamaan  $\sum_{k=1}^3 \ell_k = \ell$  dan  $\sum_{k=1}^3 k\ell_k = 3$  untuk  $\ell=3$  adalah  $\ell_1 = 3$ ,

$\ell_2 = \ell_3 = 0$ , dan dengan cara yang sama didapat  $C(3,3,a) = a^3$ .

Berdasarkan persamaan (4.1) dan hasil-hasil pada a, b dan c, diperoleh bentuk  $Q_3^*$ , yaitu

$$\begin{aligned} Q_3^* &= (-1)^4 C(3,1,a) A_1^{a-3} + (-1)^5 C(3,2,a) A_1^{2a-3} + (-1)^6 C(3,3,a) A_1^{3a-3} \\ &= a(a-1)(a-2) A_1^{a-3} - 3a^2(a-1) A_1^{2a-3} + a^3 A_1^{3a-3}, \end{aligned}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$Q_3^* = A_1^{a-3} [a(a-1)(a-2) - 3a^2(a-1)A_1^a + a^3A_1^{2a}], \text{ dengan } A_1 = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{y_k}{a}}.$$

Penentuan  $Q_4^*$  pada kasus 4-variat terlebih dahulu adalah penentuan polinomial-polinomial  $C(4,1,a)$ ,  $C(4,2,a)$ ,  $C(4,3,a)$  dan  $C(4,4,a)$ , yaitu

a. Solusi dari sistem persamaan  $\sum_{k=1}^4 \ell_k = \ell$ , dan  $\sum_{k=1}^4 k\ell_k = 4$  untuk  $\ell = 1$  adalah

unik (tunggal), yaitu  $\ell_1 = 0, \ell_2 = 0, \ell_3 = 1, \ell_4 = 1$ , sehingga didapat

$$\begin{aligned} C(4,1,a) &= P_{0,0,0,1}^4 \prod_{k=1}^4 \binom{a}{k}^{\ell_k} = \frac{4!}{0!0!0!1!} \binom{a}{1}^0 \binom{a}{2}^0 \binom{a}{3}^0 \binom{a}{4}^1 = 4! \frac{a!}{(a-4)!4!} \\ &= a(a-1)(a-2)(a-3) \end{aligned}$$

b. Solusi dari sistem persamaan  $\sum_{k=1}^4 \ell_k = \ell$ , dan  $\sum_{k=1}^4 k\ell_k = 4$  untuk  $\ell = 2$  adalah

tidak tunggal, yakni  $\ell_1 = 0, \ell_2 = 2, \ell_3 = 0, \ell_4 = 0$  atau  $\ell_1 = 1, \ell_2 = 0, \ell_3 = 1, \ell_4 = 0$ .

$C(4,2,a)$  dihitung berdasarkan persamaan (2.15) dan didapat

$$\begin{aligned} C(4,2,a) &= \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4=2 \\ \ell_1+2\ell_2+3\ell_3+4\ell_4=4 \\ \ell_k \in \text{bulat non-negatif}}} P_{\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4}^4 \prod_{k=1}^4 \binom{a}{k}^{\ell_k} = P_{0,2,0,0}^4 \prod_{k=1}^4 \binom{a}{k}^{\ell_k} + P_{1,0,1,0}^4 \prod_{k=1}^4 \binom{a}{k}^{\ell_k} \\ &= 7a^4 - 18a^3 + 11a^2 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} P_{0,2,0,0}^4 \prod_{k=1}^4 \binom{a}{k}^{\ell_k} &= \frac{4!}{0!2!0!0!} \binom{a}{1}^0 \binom{a}{2}^2 \binom{a}{3}^0 \binom{a}{4}^0 = \frac{4!}{2!} \left( \frac{a!}{2!(a-2)!} \right)^2 = \frac{4!}{2!} \left( \frac{a(a-1)}{2!} \right)^2 \\ &= 3a^2(a-1)^2 = 3a^4 - 6a^3 + 3a^2 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} P_{1,0,1,0}^4 \prod_{k=1}^4 \binom{a}{k}^{\ell_k} &= \frac{4!}{1!0!1!0!} \binom{a}{1}^1 \binom{a}{2}^0 \binom{a}{3}^1 \binom{a}{4}^0 = 4! \binom{a}{1}^1 \binom{a}{3}^1 \\ &= 4! \left( \frac{a!}{(a-1)!} \right) \left( \frac{a!}{3!(a-3)!} \right) = 4a(a-1)(a-2) = 4a^4 - 12a^3 + 8a^2. \end{aligned}$$

c. Solusi sistem persamaan  $\sum_{k=1}^4 \ell_k = \ell$ , dan  $\sum_{k=1}^4 k\ell_k = 4$  untuk  $\ell = 3$  adalah unik,

yaitu  $\ell_1 = 2, \ell_2 = 1, \ell_3 = 0, \ell_4 = 0$ , dan dengan cara yang sama seperti poin a didapat  $C(4, 3, a) = 6a^3(a-1)$ .

- d. Solusi sistem persamaan  $\sum_{k=1}^4 \ell_k = \ell$ , dan  $\sum_{k=1}^4 k\ell_k = 4$  untuk  $\ell = 4$  adalah unik, yaitu  $\ell_1 = 4, \ell_2 = 0, \ell_3 = 0, \ell_4 = 0$ , dan didapat  $C(4, 4, a) = a^4$ .

Berdasarkan persamaan (4.1) dan berdasarkan hasil penghitungan pada a, b, c dan d, didapat bentuk  $Q_4^*$ , yaitu

$$Q_4^* = -a(a-1)(a-2)(a-3)A^{a-4} + (7a^4 - 18a^3 + 11a^2)A^{2a-4} - 6a^3(a-1)A^{3a-4} + a^4A^{4a-4},$$

atau

$$Q_4^* = A_1^{a-4} \left[ -a(a-1)(a-2)(a-3) + (7a^4 - 18a^3 + 11a^2)A_1^a - 6a^3(a-1)A_1^{2a} + a^4A_1^{3a} \right]$$

dengan  $A_1 = \sum_{k=1}^4 \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}$ . Bentuk  $Q_2^*$  pada kasus bivariat dapat ditentukan dengan

cara yang sama seperti pada kasus trivariat dan didapat

$$Q_2^* = A_1^{a-2} [-a(a-1) + a^2A_1^a], \text{ dengan } A_1 = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}.$$

Berdasarkan hasil penghitungan  $Q_3^*$  pada persamaan (4.1), model khusus dari FKP (2.14) untuk  $m = 3$  adalah FKP bersama distribusi Weibull trivariat, yakni

$$f(y_1, y_2, y_3) = \left( \prod_{k=1}^3 \left( \frac{1}{a} \right) \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}-1} \right) Q_3^* \exp[-A_1^a], \quad (4.2)$$

dengan

$$Q_3^* = a(a-1)(a-2)A_1^{a-3} - 3a^2(a-1)A_1^{2a-3} + a^3A_1^{3a-3} \text{ dan } A_1 = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}$$

Penaksiran parameter FKP (2.14) menggunakan metode *maximum likelihood estimation* (MLE), yaitu penaksir parameter yang didapat dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*. Diketahui bahwa FKP (2.14) mempunyai  $2m+1$  buah parameter yang dapat dinyatakan dalam bentuk vektor, yaitu

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [a \ \boldsymbol{\lambda}^T \ \boldsymbol{\gamma}^T]^T,$$

dengan  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m]^T$  dan  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_m]^T$ .

Misalkan,  $(Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{mi})$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah sampel acak berukuran  $n$  yang saling bebas dari suatu populasi yang berdistribusi Weibull multivariat dengan fungsi kepadatan peluang (2.14), maka fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^n f_1(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}_i) \\ &= \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \left( \frac{1}{a} \right) \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a} - 1} \right) \right) \left( \prod_{i=1}^n A_{1i}^{a-m} \right) \times \\ &\quad \left( \prod_{i=1}^n \exp[-A_{1i}^a] \right) \left( \prod_{i=1}^n \left( \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_{1i}^{(\ell-1)a} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{dengan } A_{1i} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right)^{\gamma_k/a}.$$

Berdasarkan definisi MLE, penaksir *maximum likelihood* (ML) ( $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ ) adalah nilai dari vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$  yang memaksimumkan fungsi *likelihood*  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})$ . Fungsi *likelihood* (4.3) adalah fungsi kontinu dan mempunyai turunan parsial terhadap semua komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$ , oleh karena itu  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$  dapat diperoleh dengan cara menentukan solusi dari sistem persamaan

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a} \ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_1} \ \dots \ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_m} \ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_1} \ \dots \ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_m} \right]^T = \mathbf{0}.$$

Penaksir ML ( $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ ) secara umum lebih mudah didapat dengan cara memaksimumkan logaritma natural dari fungsi *likelihood* ( $L(\boldsymbol{\theta}_0)$ ), karena maksimum fungsi  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})$  dan  $L(\boldsymbol{\theta}_0) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})$  dicapai pada titik yang sama. Logaritma natural dari fungsi *likelihood* atau *log-likelihood* FKP (4.3) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$L(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}), \quad (4.4)$$

dengan

$$L_1(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\ln \gamma_k - \ln a - \ln \lambda_k + (\frac{\gamma_k}{a} - 1)(\ln y_{ki} - \ln \lambda_k));$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (a - m) \ln A_{li};$$

$$L_3(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = -\sum_{i=1}^n A_{li}^a;$$

$$L_4(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \ln Q_{mi}^*, \text{ dimana}$$

$$Q_{mi}^* = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_{li}^{(\ell-1)a}, \text{ dan } A_{li} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}.$$

Penaksir ML ( $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ ) yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood* (4.4) didapat dengan menentukan solusi dari persamaan *likelihood* yang diberikan oleh persamaan (4.5) berikut

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} = \left[ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a} \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_1} \dots \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_m} \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_1} \dots \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_m} \right] = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

dengan  $\partial L(\boldsymbol{\theta}_0) / \partial \boldsymbol{\theta}_0$  pada ruas kiri persamaan (4.5) adalah vektor turunan parsial orde pertama dan dinamakan vektor gradien atau vektor skor berdimensi  $2m+1$ , dan ditulis dengan  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0) = \partial L(\boldsymbol{\theta}_0) / \partial \boldsymbol{\theta}_0$ .

Berdasarkan persamaan (4.4), solusi persamaan *likelihood* (4.5) tidak dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit (*closed form*) secara analitikal, karena sistem persamaan (4.5) terdiri dari persamaan-persamaan yang saling bergantung (*interdepent*). Penentuan penaksir ML dapat menggunakan metode alternatif, yakni  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$  dihampiri oleh akar-akar persamaan *likelihood* (4.5) dan diselesaikan secara numerik dengan metode iterasi Newton-Raphson. Proses iterasi secara numerik untuk memperoleh  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$  diberikan oleh

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q^*+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q^*)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q^*)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q^*)}), \quad q^* = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

dengan  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q^*)})$  dan  $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q^*)})$  masing-masing adalah vektor gradien dan matriks Hessian yang dievaluasi pada vektor  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$  setelah iterasi ke- $q^*$ .



Proses iterasi dimulai dari nilai awal  $\boldsymbol{\theta}_0^{(0)}$ , dan dihentikan pada iterasi ke  $q^*+1$ , jika memenuhi  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q^*+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q^*)}\| < \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  adalah bilangan positif yang cukup kecil. Matriks Hessian pada proses iterasi (4.6) mempunyai ukuran  $(2m+1) \times (2m+1)$  dan mempunyai bentuk umum

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \boldsymbol{\lambda}^T} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \boldsymbol{\gamma}^T} \\ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial a} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \boldsymbol{\lambda}^T} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} \\ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial a} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\lambda}^T} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Berdasarkan persamaan (4.4), penentuan komponen-komponen vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0)$  dan elemen-elemen matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)$  lebih mudah dilakukan secara bertahap per bagian, yaitu masing-masing dapat menggunakan formula

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{q=1}^4 \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0}$$

dan

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{q=1}^4 \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0 \partial \boldsymbol{\theta}_0^T},$$

dengan  $\mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta}_0)$  untuk  $q=1,2,3,4$  masing-masing adalah matriks simetri berukuran  $(2m+1) \times (2m+1)$ .

Berdasarkan fungsi *log-likelihood* pada persamaan (4.4), komponen-komponen vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0)$  dan elemen-elemen matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)$  dapat ditentukan lebih mudah per bagian sebagai berikut :

(1) Bagian pertama

Berdasarkan persamaan (4.4), fungsi  $L_1(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})$  diberikan oleh

$$L_1(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\ln \gamma_k - \ln a - \ln \lambda_k + (\frac{\gamma_k}{a} - 1)(\ln y_{ki} - \ln \lambda_k)).$$

Turunan parsial orde pertama dari  $L_1(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})$  terhadap semua komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$  masing-masing adalah

$$\begin{aligned}
\text{(a). } \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a} &= -\frac{mn}{a} - \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \gamma_k \ln \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right) \\
\text{(b). } \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k} &= \frac{n}{\gamma_k} + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m \\
\text{(c). } \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k} &= -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}$$

Turunan parsial orde kedua dari  $L_1(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})$  terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$  masing-masing adalah sebagai berikut :

Untuk  $k = 1, 2, \dots, m$  dan  $l = 1, 2, \dots, m$  didapat

$$\begin{aligned}
\text{(a). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a^2} &= \frac{mn}{a^2} + \frac{2}{a^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \gamma_k \ln \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right) \\
\text{(b). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k^2} &= -\frac{n}{\gamma_k^2}, \\
\text{(c). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda_k^2} &= \frac{n}{a} \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k^2} \right) \\
\text{(d). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \gamma_k} &= -\frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (\ln y_{ki} - \ln \lambda_k) \\
\text{(e). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \lambda_k} &= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \\
\text{(f). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} &= 0 \\
\text{(g). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_k} &= -\frac{n}{a \lambda_k} \\
\text{(h). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_l} &= 0 \\
\text{(i). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} &= 0.
\end{aligned}$$

(2) Bagian kedua

Berdasarkan persamaan (4.4), fungsi  $L_2(\boldsymbol{\theta}_0)$  diberikan oleh

$L_2(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{i=1}^n (a-m) \ln A_i$  dengan  $A = \sum_{k=1}^m \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}$ . Turunan parsial orde pertama

dari  $L_2(\boldsymbol{\theta}_0)$  terhadap semua komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$  untuk  $k=1,2,\dots,m$ , masing-masing adalah

$$(a). \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (aU_i + mM_i) A_i^{-1}$$

$$(b). \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k} = \left( \frac{a-m}{a} \right) \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{-1}$$

$$(c). \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k} = - \left( \frac{a-m}{a} \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) D_{ki} A_i^{-1},$$

dengan

$$U_i = A_i \ln A_i - M_i; M_i = \sum_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} B_{ki}; U_i^* = M_i \ln A_i - M_i^*$$

$$B_{ki} = D_{ki} (\ln y_{ki} - \ln \lambda_k); D_{ki} = \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}$$

Turunan parsial orde kedua dari  $L_2(\boldsymbol{\theta}_0)$  terhadap semua kombinasi vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$  untuk  $k,l=1,2,\dots,m$  masing-masing adalah

$$(a). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ (a-m)(M_i^* A_i^{-1} - M_i^2 A_i^{-2}) - 2mM_i A_i^{-1} \right]$$

$$(b). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k^2} = \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n \left( B_{ki}^* A_i^{-1} - B_{ki}^2 A_i^{-2} \right)$$

$$(c). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k^2} = \left( \frac{a-m}{a} \right) \sum_{i=1}^n \left( \left[ \frac{\gamma_k}{\lambda_k^2} + \frac{1}{a} \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^2 \right] D_{ki} A_i^{-1} - \frac{1}{a} \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^2 D_{ki}^2 A_i^{-2} \right)$$

$$(d). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \gamma_k} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ mB_{ki} A_i^{-1} + (a-m) \left( B_{ki} M_i A_i^{-2} - \frac{\gamma_k}{a} B_{ki}^* A_i^{-1} \right) \right]$$

$$(e). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \lambda_k} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ (a-m) \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \left[ \frac{\gamma_k}{a} B_{ki} A_i^{-1} - D_{ki} M_i A_i^{-2} \right] - m \frac{\gamma_k}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{-1} \right]$$

$$(f). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_k} = - \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{a}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{-1} + \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki} (A_i^{-1} - D_{ki} A_i^{-2}) \right]$$

$$(g). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_l} = \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_l}{\lambda_l} D_{li} B_{ki} A_i^{-2}$$

$$(h). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = - \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n B_{ki} B_{li} A_i^{-2}$$

$$(i). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} = - \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{\gamma_l}{\lambda_l} \right) D_{ki} D_{li} A_i^{-2}$$

dengan

$$M_i^* = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\gamma_k}{a} \right)^2 B_{ki} \ln \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right) \text{ dan } B_{ki}^* = B_{ki} (\ln y_{ki} - \ln \lambda_k).$$

### (3) Bagian ketiga

Diketahui, berdasarkan persamaan (4.4), fungsi  $L_3(\boldsymbol{\theta}_0)$  diberikan oleh

$$L_3(\boldsymbol{\theta}_0) = - \sum_{i=1}^n A_i^a. \text{ Turunan parsial orde pertama dari } L_3(\boldsymbol{\theta}_0) \text{ terhadap semua}$$

komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$ , untuk  $k = 1, 2, \dots, m$ , masing-masing adalah

$$(a). \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a} = - \sum_{i=1}^n U_i A_i^{a-1}$$

$$(b). \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k} = - \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{a-1}$$

$$(c). \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_k}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{a-1}.$$

Turunan parsial orde kedua dari  $L_3(\boldsymbol{\theta}_0)$  terhadap semua kombinasi komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$ , untuk  $k, l = 1, 2, \dots, m$ , masing-masing adalah

$$(a). \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a^2} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \left[ A_i U_i^* - (a U_i + M_i) U_i \right] A_i^{a-2}$$

$$(b). \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k^2} = - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \left[ A_i B_{ki}^* - (a-1) B_{ki}^2 \right] A_i^{a-2}$$

$$(c). \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k^2} = - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\gamma_k}{\lambda_k^2} D_{ki} A_i^{a-1} + \frac{1}{a} \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^2 \left( D_{ki} A_i^{a-1} + (a-1) D_{ki}^2 A_i^{a-2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
\text{(d). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \gamma_k} &= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ \gamma_k B_{ki}^* A_i^{a-1} - a(aU_i + M_i) B_{ki} A_i^{a-2} \right] \\
\text{(e). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \lambda_k} &= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \left( a(aU_i + M_i) D_{ki} A_i^{a-2} - \gamma_k B_{ki} A_i^{a-1} \right) \right] \\
\text{(f). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_k} &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{a-1} + \frac{1}{a} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \left( B_{ki} A_i^{a-1} + (a-1) B_{ki} D_{ki} A_i^{a-2} \right) \right] \\
\text{(g). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_l} &= \frac{a-1}{a} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_l}{\lambda_l} D_{li} B_{ki} A_i^{a-2} \\
\text{(h). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} &= -\left( \frac{a-1}{a} \right) \sum_{i=1}^n B_{li} B_{ki} A_i^{a-2} \\
\text{(i). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} &= -\frac{a-1}{a} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{\gamma_l}{\lambda_l} \right) D_{ki} D_{li} A_i^{a-2}.
\end{aligned}$$

#### (4) Bagian Keempat

Berdasarkan persamaan (4.4), fungsi  $L_4(\boldsymbol{\theta}_0)$  diberikan oleh

$$L_4(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{i=1}^n \ln Q_i, \text{ dimana } Q_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a}, \text{ dengan } C(m, \ell, a)$$

didefinisikan pada persamaan (2.15). Berdasarkan bentuk  $L_4(\boldsymbol{\theta}_0)$  pada persamaan (4.4), komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}_0)$  dapat ditentukan menggunakan formula umum, yaitu

$$\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \left[ \frac{\partial Q_i^*}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} \right],$$

dan elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}_0)$  dapat ditentukan menggunakan formula umum, yaitu.

$$\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{Q_i} \right)^2 \left( \left[ \frac{\partial^2 Q_i^*}{\partial \boldsymbol{\theta}_0 \partial \boldsymbol{\theta}_0^T} \right] Q_i^* - \left[ \frac{\partial Q_i^*}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} \right] \left[ \frac{\partial Q_i^*}{\partial \boldsymbol{\theta}_0^T} \right] \right).$$

Berdasarkan persamaan (4.4), komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}_0)$  dan elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}_0)$  masing-masing diperoleh dari turunan parsial orde pertama dan kedua fungsi  $Q_i$ . Berikut ini dikemukakan turunan parsial orde pertama dan kedua fungsi  $Q_i$  terhadap komponen-komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$  untuk

FKP distribusi Weibull trivariat dan bivariat. Persamaan  $Q_i$  untuk FKP distribusi Weibull trivariat adalah

$$Q_i = a(a-1)(a-2) - 3a^2(a-1)A_i^a + a^3A_i^{2a} \text{ dengan } A = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}.$$

Turunan parsial orde pertama dari  $Q_i$  terhadap semua komponen vektor  $[a \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$  untuk  $k=1,2,3$ , masing-masing adalah

$$\frac{\partial Q_i}{\partial a} = \kappa_i + \phi_i U_i A_i^{a-1}, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \gamma_k} = \phi_i B_{ki} A_i^{a-1} \text{ dan } \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda_k} = -\phi_i \frac{\gamma_k}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{a-1}$$

dengan

$$\kappa_i = 3[(a-1)^2 - a(3a-2)A_i^a + a^2A_i^{2a}] - 1 \text{ dan}$$

$$\phi_i = 2a^3A_i^a - 3a^2(a-1).$$

Turunan parsial orde kedua dari  $Q_i$  terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor  $[a \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$  untuk  $k,l=1,2,3$  adalah

$$(a). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a^2} = \varphi_{1i} + \varphi_{5i} U_i + \varphi_{6i} U_i^*, \text{ dengan}$$

$$\varphi_{1i} = 6(a-1) - 6(3a-1)A_i^a + 6aA_i^{2a}; \quad \varphi_{2i} = 6a^2A_i^{2a-1} - 3a(3a-2)A_i^{a-1};$$

$$\varphi_{3i} = 2a^3U_iA_i^{2a-2}; \quad \varphi_{4i} = \frac{\phi_i}{a}(aU_i + M_i)A_i^{a-2}; \quad \varphi_{5i} = 2\varphi_{2i} + \varphi_{3i} + \varphi_{4i};$$

$$\varphi_{6i} = -\frac{\phi_i}{a}A_i^{a-1}.$$

$$(b). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k^2} = \frac{1}{a}(\rho_i B_{ki}^2 + \phi_i A_i B_{ki}^*)A_i^{a-2}, \text{ dengan } \rho_i = 2a^4A_i^a + (a-1)\phi_i.$$

$$(c). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \lambda_k^2} = \frac{1}{a}[\rho_i \gamma_k D_{ki} + (a + \gamma_k)\phi_i A_i] \frac{\gamma_k}{\lambda_k^2} D_{ki} A_i^{a-2}$$

$$(d). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \gamma_k} = (\varphi_{2i} + \varphi_{3i})B_{ki} + V_{ki}A_i^{a-2}, \text{ dengan } V_{ki} = \frac{1}{a^2}[a(aU_i + M_i)B_{ki} - \gamma_k A_i B_{ki}^*]\phi_i$$

$$(e). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \lambda_k} = -(\varphi_{2i} + \varphi_{3i}) \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki} + N_{ki}A_i^{a-2}, \text{ dengan}$$

$$N_{ki} = \frac{1}{a^2} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} [\gamma_k B_{ki} A - a(aU_i + M_i)D_{ki}]\phi_i$$

$$(f). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \lambda_k} = -(\delta_{ki} A_i + \frac{\rho_i}{a} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki} D_{ki}) A_i^{a-2} \text{ dengan}$$

$$\delta_{ki} = \frac{1}{a} \left( \frac{a}{\lambda_k} D_{ki} + \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki} \right) \phi_i$$

$$(g). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = \frac{1}{a} \rho_i B_{ki} B_{li} A_i^{a-2}$$

$$(h). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} = \frac{1}{a} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \frac{\gamma_l}{\lambda_l} \rho_i D_{ki} D_{li} A_i^{a-2}$$

$$(i). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \lambda_l} = -\frac{1}{a} \frac{\gamma_l}{\lambda_l} \rho_i B_{ki} D_{li} A_i^{a-2}.$$

Persamaan  $Q_i$  untuk FKP distribusi Weibull bivariat diberikan oleh

$$Q_i = -a(a-1) + a^2 A^a, \text{ dengan } A = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}.$$

Turunan-turunan parsial orde pertama dari  $Q_i$  terhadap semua komponen vektor

$[a \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \lambda_1 \ \lambda_2]^T$  untuk  $k=1,2$ , masing-masing adalah

$$\frac{\partial Q_i}{\partial a} = 1 - 2a + 2aA_i^a + a^2 U_i A_i^{a-1};$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \gamma_k} = a^2 B_{ki} A_i^{a-1}$$

dan

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda_k} = -a^2 \frac{\gamma_k}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{a-1}.$$

Turunan-turunan parsial orde kedua dari  $Q_i$  untuk  $k, l=1,2$  masing-masing adalah

$$(a). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a^2} = 2(A_i^a - 1) + a(4U_i - U_i^*) A_i^{a-1} + a(aU_i + M_i) U_i A_i^{a-2}$$

$$(b). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k^2} = -\gamma_k B_{ki}^* A_i^{a-1} + a(a-1) B_{ki}^2 A_i^{a-2}.$$

$$(c). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \lambda_k^2} = \left( a^2 \frac{\gamma_k}{\lambda_k^2} + a \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^2 \right) D_{ki} A_i^{a-1} + a(a-1) \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^2 D_{ki}^2 A_i^{a-2}$$

$$\begin{aligned}
\text{(d). } \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \gamma_k} &= (2aB_{ki} - \gamma_k B_{ki}^*) A_i^{a-1} + a(aU_i + M_i) B_{ki} A_i^{a-2} \\
\text{(e). } \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \lambda_k} &= \frac{\gamma_k}{\lambda_k} [(\gamma_k B_{ki} - 2aD_{ki}) A_i^{a-1} - a(aU_i + M_i) D_{ki} A_i^{a-2}] \\
\text{(f). } \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \lambda_k} &= -\left(\frac{a^2}{\lambda_k} D_{ki} + a \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki}\right) A_i^{a-1} - a(a-1) \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki} D_{ki} A_i^{a-2} \\
\text{(g). } \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \lambda_l} &= -a(a-1) \frac{\gamma_l}{\lambda_l} B_{ki} D_{li} A_i^{a-2} \\
\text{(h). } \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} &= a(a-1) B_{ki} B_{li} A_i^{a-2} \\
\text{(i). } \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} &= a(a-1) \left(\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\right) \left(\frac{\gamma_l}{\lambda_l}\right) D_{ki} D_{li} A_i^{a-2} .
\end{aligned}$$

## 4.2. Model Regresi Weibull Multivariat

Model regresi Weibull multivariat dikembangkan dari FKP bersama distribusi Weibull multivariat dengan parameter skala dinyatakan dalam fungsi kovariat atau dinyatakan dalam parameter regresi. Model RWM yang dikembangkan pada penelitian ini dikonstruksi dari fungsi *survival* bersama distribusi Weibull multivariat yang dikembangkan oleh Lee dan Wen (2009), dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi dengan kovariat identik dan parameter-parameter regresi berbeda.

Parameter-parameter skala pada fungsi *survival* bersama (2.16) dapat dinyatakan dalam parameter regresi yang berbeda dan dengan kovariat yang sama (identik) melalui suatu hubungan yang didefinisikan oleh

$$\ln \lambda_k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}, \quad (4.8)$$

untuk  $k = 1, 2, \dots, m$ , dengan  $\boldsymbol{\beta}_k = [\beta_{k0} \ \beta_{k1} \ \dots \ \beta_{kp}]^T$  adalah vektor parameter regresi dan  $\mathbf{x} = [1 \ X_1 \ X_2 \ \dots \ X_p]^T$  adalah vektor kovariat. Fungsi *survival* bersama (2.16) dapat dinyatakan dalam suatu fungsi yang memuat kovariat dengan menggunakan hubungan (4.8). Model fungsi survival bersama dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam parameter regresi adalah



$$S(y_1, y_2, \dots, y_m) = \exp[-A^a], \quad (4.9)$$

dengan

$$A = \sum_{k=1}^m (y_k)^{\frac{\gamma_k}{a}} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}\right].$$

Dengan melakukan penurunan parsial fungsi survival (4.9) terhadap semua peubah  $y_1, y_2, \dots, y_m$  diperoleh model FKP bersama yang memuat parameter regresi atau bergantung pada kovariat, yaitu

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \dots, y_m) &= \frac{(-1)^m \partial^m S(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\partial y_1 \partial y_2 \cdots \partial y_m} \\ &= \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} (y_k)^{(\gamma_k/a)-1} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}\right] \right) \exp[-A^a] \times \\ &\quad \left( \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A^{\ell a - m} \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

dengan  $C(m, \ell, a)$  didefinisikan pada (2.15). Model FKP (4.10) untuk selanjutnya dinamakan model regresi Weibull multivariat atau RWM. Berdasarkan persamaan (4.10), untuk  $m = 3$  didapat model regresi Weibull trivariat (RWT), yaitu

$$f(y_1, y_2, y_3) = \left( \prod_{k=1}^3 \frac{\gamma_k}{a} (y_k)^{(\gamma_k/a)-1} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}\right] \right) Q_3^* \exp[-A^a],$$

dengan

$$Q_3^* = a(a-1)(a-2)A^{a-3} - 3a^2(a-1)A^{2a-3} + a^3A^{3a-3},$$

atau dapat ditulis

$$f(y_1, y_2, y_3) = \left( \prod_{k=1}^3 \frac{\gamma_k}{a} (y_k)^{(\gamma_k/a)-1} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}\right] \right) A^{a-3} Q \exp[-A^a],$$

dengan  $Q = a(a-1)(a-2) - 3a^2(a-1)A^a + a^3A^{2a}$ .

### 4.3. Penaksiran Parameter Model RWM

Model RWM yang diberikan oleh persamaan (4.10) mempunyai  $m(p+1)+m+1$  parameter, yaitu sebuah parameter ukuran derajat *dependence* dalam asosiasi antar peubah respon,  $m$  parameter bentuk dan  $m(p+1)$  parameter regresi. Parameter model RWM (4.10) dinyatakan dalam vektor  $\boldsymbol{\theta}$ , yaitu

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{\gamma}^T & \boldsymbol{\beta}^T \end{bmatrix}^T, \quad (4.11)$$

dengan

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_m]^T, \quad \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1^T \ \boldsymbol{\beta}_2^T \ \cdots \ \boldsymbol{\beta}_m^T]^T \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{\beta}_k = [\beta_{k0} \ \beta_{k1} \ \cdots \ \beta_{kp}]^T, \\ k = 1, 2, \dots, m.$$

Metode penaksiran parameter model RWM (4.10) adalah MLE. Berdasarkan metode MLE, penaksir  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  adalah nilai vektor  $\boldsymbol{\theta}$  yang memaksimumkan fungsi *likelihood* dan juga memaksimumkan fungsi *log-likelihood*. Penaksir ML dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood*, yaitu sistem persamaan dari semua turunan parsial orde pertama dari fungsi *log-likelihood* setelah disamakan dengan nol.

Berdasarkan model RWM (4.10), persamaan *likelihood* terdiri dari persamaan-persamaan yang saling bergantung (*interdependent*) yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit, sehingga bentuk eksplisit (*closed form*) penaksir ML parameter model RWM tidak dapat ditemukan secara analitik. Penaksir ML ( $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ) dihampiri oleh akar-akar persamaan *likelihood* yang diperoleh melalui proses iterasi numerik, dalam hal ini metode iterasi Newton-Raphson. Penentuan penaksir ML menggunakan metode iterasi Newton-Raphson diperlukan penghitungan vektor skor atau vektor gradien dan matriks Hessian. Berikut ini dikemukakan Lemma tentang vektor gradien dan matriks Hessian model RWM.

#### Lemma 4.1

Diketahui  $\mathbf{y}_i = [Y_{1i} \ Y_{2i} \ \cdots \ Y_{mi}]^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah sampel vektor acak kontinu non-negatif *iid* berdistribusi Weibull multivariat  $\mathbf{y}_i \sim W(a, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma})$ , dimana  $a$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_m]^T$  dan  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_m]^T$  berturut-turut adalah parameter ukuran derajat *dependence*, vektor parameter bentuk dan vektor parameter skala. Parameter skala  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  masing-masing dinyatakan dalam parameter regresi sedemikian sehingga  $\lambda_k = \exp[\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}]$ . Jika fungsi *likelihood* model RWM (4.10) diberikan oleh  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ , dengan  $\boldsymbol{\theta}$  diberikan oleh persamaan (4.11), maka vektor gradien model RWM (4.10) dapat dinyatakan menjadi

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}), \quad (4.12)$$

dengan

$$\mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left[ \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} \quad \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T} \quad \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right]^T, \quad (4.13)$$

dan

(1) komponen-komponen  $\mathbf{g}_1(\boldsymbol{\theta})$  dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} &= -\frac{mn}{a} + \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \gamma_k (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}); \\ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} &= \frac{n}{\gamma_k} - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}), \quad k = 1, 2, \dots, m \text{ dan} \\ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} &= -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \gamma_k X_{hi}, \quad k = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, p. \end{aligned}$$

(2) komponen-komponen  $\mathbf{g}_2(\boldsymbol{\theta})$  dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} &= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (aU_i - mM_i) A_i^{-1}, \text{ dengan} \\ D_{ki} &= (y_k)^{\gamma_k/a} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i\right]; \quad A_i = \sum_{k=1}^m D_{ki}; \quad B_{ki} = D_{ki} (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}); \\ M_i &= \sum_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} B_{ki} \quad \text{dan} \quad U_i = A_i \ln A_i + M_i. \\ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} &= -\left(\frac{a-m}{a}\right) \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \text{ dan} \\ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} &= -\left(\frac{a-m}{a}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{-1} X_{hi}, \quad k = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, p. \end{aligned}$$

(3) komponen-komponen  $\mathbf{g}_3(\boldsymbol{\theta})$  dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} &= -\sum_{i=1}^n U_i A_i^{a-1} = -\sum_{i=1}^n (A_i \ln A_i + M_i) A_i^{a-1}; \\ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} &= \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{a-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m \text{ dan} \\ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} &= \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{a-1} X_{hi}, \quad k = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, p. \end{aligned}$$

(4) komponen-komponen  $\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta})$  dapat dinyatakan

$$\frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell} \left[ A_i \frac{\partial C(m, \ell, a)}{\partial a} + (\ell-1) U_i C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right] \right],$$

dimana

$$Q_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a} \text{ dan}$$

$C(m, \ell, a)$  diberikan oleh persamaan (2.15),

$$\frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) B_{ki} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right], \quad k=1, 2, \dots, m$$

dan

$$\frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \left[ \gamma_k D_{ki} X_{hi} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right], \quad k=1, 2, \dots, m;$$

$$h=0, 1, \dots, p.$$

Bukti :

Diketahui  $(Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{mi})$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  adalah sampel vektor acak *iid* berdistribusi Weibull multivariat dengan FKP  $f_i(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\theta})$  dan fungsi *likelihood* model RWM (4.10) didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_i) = \prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_i) \\ &= \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} (y_{ki})^{(\gamma_k/a)-1} \exp \left[ -\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i \right] \right) \right) \left( \prod_{i=1}^n A_i^{a-m} \right) \times \\ &\quad \left( \prod_{i=1}^n \exp[-A_i^a] \right) \left( \prod_{i=1}^n \left( \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

dengan vektor  $\boldsymbol{\theta}$  diberikan oleh persamaan (4.11). Penerapan logaritma natural pada kedua ruas persamaan (4.14) diperoleh fungsi *log-likelihood* model RWM, dan dapat dinyatakan menjadi

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}), \quad (4.15)$$

dengan

$$L_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left( \ln \gamma_k - \ln a + \left( \frac{\gamma_k}{a} - 1 \right) \ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i \right); \quad (4.16)$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (a-m) \ln A_i; \quad (4.17)$$

$$L_3(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = -\sum_{i=1}^n A_i^a; \quad (4.18)$$

$$L_4(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \ln Q_i ; \quad (4.19)$$

$$Q_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a} \text{ dan } A_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\gamma_k/a} \exp[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i], \quad (4.20)$$

dimana  $C(m, \ell, a)$  diberikan oleh persamaan (2.15).

Diketahui  $L_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ ,  $q=1,2,3,4$  yang masing-masing diberikan oleh persamaan (4.16) sampai dengan (4.19) adalah fungsi dari vektor  $\boldsymbol{\theta}$  yang berdimensi  $m(p+1)+m+1$ . Berdasarkan definisi (Khuri, 2003), vektor gradien dari fungsi *log-likelihood*  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  yang diberikan oleh persamaan (4.15) adalah

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}^T, \quad (4.21)$$

dengan vektor  $\boldsymbol{\theta}$  diberikan oleh persamaan (4.11).

Berdasarkan sifat turunan dari jumlah suatu fungsi, vektor gradien dari fungsi *log-likelihood*  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  yang diberikan oleh persamaan (4.15) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \sum_{q=1}^4 \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \sum_{q=1}^4 \mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}). \quad (4.22)$$

Komponen-komponen vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  dengan memperhatikan persamaan (4.22) dan (2.16) – (4.19) dapat diperoleh dengan menentukan komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  untuk  $q=1,2,3,4$ . Vektor  $\mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ ,  $q=1,2,3,4$  masing-masing berdimensi  $m(p+2)+1$  dan komponen-komponennya adalah

$$\mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} & \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}^T. \quad (4.23)$$

(1) Berdasarkan persamaan (4.23), vektor  $\mathbf{g}_1(\boldsymbol{\theta})$  adalah

$$\mathbf{g}_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} & \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}^T,$$

dengan  $L_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  diberikan oleh persamaan (4.16). Komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_1(\boldsymbol{\theta})$  dengan memperhatikan persamaan (4.16) dan (4.23) masing-masing adalah

$$(a) \quad \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left( \ln \gamma_k - \ln a + \left( \frac{\gamma_k}{a} - 1 \right) \ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i \right) \right]$$

$$= -\frac{mn}{a} + \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \gamma_k (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki});$$

$$(b) \quad \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_2} & \dots & \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_m} \end{bmatrix}^T, \text{ dengan bentuk umum } \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k}$$

adalah

$$\frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left( \ln \gamma_k - \ln a + \left( \frac{\gamma_k}{a} - 1 \right) \ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i \right) \right]$$

$$= \frac{n}{\gamma_k} - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}), \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$(c) \quad \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} & \dots & \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_m^T} \end{bmatrix}^T, \text{ dengan}$$

$$\frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{k0}} & \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{k1}} & \dots & \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kp}} \end{bmatrix}^T, \text{ dimana bentuk umum } \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}}$$

adalah

$$\frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left( \ln \gamma_k - \ln a + \left( \frac{\gamma_k}{a} - 1 \right) \ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \gamma_k X_{hi}, \quad k = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, p.$$

(2) Berdasarkan persamaan (4.23), vektor  $\mathbf{g}_2(\boldsymbol{\theta})$  adalah

$$\mathbf{g}_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} & \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}^T, \text{ dengan } L_2(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \text{ diberikan}$$

oleh persamaan (4.17). Berdasarkan persamaan (4.17) dan (4.23), komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_2(\boldsymbol{\theta})$  masing-masing adalah

$$(a) \quad \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{i=1}^n (a - m) \ln A_i \right] = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (a U_i - m M_i) A_i^{-1}, \text{ dengan}$$

$$D_{ki} = (y_k)^{\gamma_k/a} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i\right], \quad (4.24)$$

$$B_{ki} = D_{ki} (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}), \quad (4.25)$$

$$M_i = \sum_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} B_{ki}, \quad (4.26)$$

$$U_i = A_i \ln A_i + M_i. \quad (4.27)$$

(b)  $\frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_1} \quad \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_2} \quad \dots \quad \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_m} \right]^T$ , dimana bentuk umum

$\frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k}$  adalah

$$\frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \sum_{i=1}^n (a-m) \ln A_i \right] = -\left(\frac{a-m}{a}\right) \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{-1}, \quad k=1, 2, \dots, m$$

(c)  $\frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \quad \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \quad \dots \quad \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_m^T} \right]^T$ , dengan

$$\frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_k} = \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{k0}} \quad \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{k1}} \quad \dots \quad \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kp}} \right]^T, \quad \text{dimana}$$

$$\frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ \sum_{i=1}^n (a-m) \ln A_i \right] = -\left(\frac{a-m}{a}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{-1} X_{hi}, \quad k=1, 2, \dots, m$$

dan  $h=0, 1, \dots, p$ .

(3) Berdasarkan persamaan (4.23), vektor  $\mathbf{g}_3(\boldsymbol{\theta})$  adalah

$$\mathbf{g}_3(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} \quad \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T} \quad \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right]^T,$$

dimana  $L_3(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  diberikan oleh persamaan (4.18). Berdasarkan persamaan

(4.18) dan (4.23), komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_3(\boldsymbol{\theta})$  masing-masing adalah

(a)  $\frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ -\sum_{i=1}^n A_i^a \right] = -\sum_{i=1}^n U_i A_i^{a-1} = -\sum_{i=1}^n (A_i \ln A_i + M_i) A_i^{a-1},$

(b)  $\frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_1} \quad \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_2} \quad \dots \quad \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_m} \right]^T$ , dimana bentuk umum

$$\frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} \text{ adalah } \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ -\sum_{i=1}^n A_i^a \right] = \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{a-1}, \quad k=1, 2, \dots, m,$$

(c)  $\frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \quad \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \quad \dots \quad \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_m^T} \right]^T$ , dengan

$$\frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_k} = \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{k0}} \quad \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{k1}} \quad \dots \quad \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kp}} \right]^T, \text{ dimana}$$

$$\frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ -\sum_{i=1}^n A_i^a \right] = \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{a-1} X_{hi}, \quad k=1,2,\dots,m \text{ dan}$$

$$h=0,1,\dots,p.$$

(4) Berdasarkan persamaan (4.23), vektor  $\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta})$  adalah

$$\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left[ \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} \quad \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T} \quad \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right]^T,$$

dimana  $L_4(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  diberikan oleh persamaan (4.19). Berdasarkan persamaan (4.19), (4.20) dan (4.23), komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta})$  dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left[ \sum_{i=1}^n \ln Q_i \right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial a} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right]^T, \end{aligned} \quad (4.28)$$

dengan

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T} = \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \gamma_1} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \gamma_2} \quad \dots \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \gamma_m} \right]; \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \quad \dots \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_m^T} \right]^T \text{ dan}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_k} = \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{k0}} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{k1}} \quad \dots \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{kp}} \right]^T, \quad k=1,2,\dots,m.$$

Berdasarkan persamaan (4.28), komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta})$  dapat diperoleh melalui penentuan turunan parsial orde pertama dari fungsi  $Q_i$ , yaitu

$$(a) \quad \frac{\partial Q_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell} \left[ A_i \frac{\partial C(m, \ell, a)}{\partial a} + (\ell-1) U_i C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right] \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} &= \frac{1}{Q_i} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{i=1}^n Q_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell} \left[ A_i \frac{\partial C(m, \ell, a)}{\partial a} + (\ell-1) U_i C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right] \right], \end{aligned}$$



$$(b) \quad \frac{\partial Q_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) B_{ki} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \text{ dan}$$

$$\frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \left[ \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_1} \quad \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_2} \quad \dots \quad \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_m} \right]^T.$$

Komponen-komponen vektor  $\frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}}$  adalah  $\frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} = \frac{1}{Q_i} \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \sum_{i=1}^n \ln Q_i \right]$

$$\frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) B_{ki} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right], \quad k=1, 2, \dots, m.$$

$$(c) \quad \frac{\partial Q_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} = \gamma_k D_{ki} X_{hi} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1}$$

dan

$$\frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left[ \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \quad \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \quad \dots \quad \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_m^T} \right]^T,$$

dengan

$$\frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_k} = \left[ \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{k0}} \quad \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{k1}} \quad \dots \quad \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kp}} \right]^T.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} &= \frac{1}{Q_i} \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ \sum_{i=1}^n \ln Q_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \left[ \gamma_k D_{ki} X_{hi} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right], \\ &k=1, 2, \dots, m \text{ dan } h=0, 1, \dots, p. \blacksquare \end{aligned}$$

#### Lemma 4.2

Jika fungsi *log-likelihood* model RWM (4.10) adalah  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  yang diberikan oleh persamaan (4.15), dengan  $L_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ ,  $q=1, 2, 3, 4$  masing-masing diberikan oleh persamaan (4.16) sampai dengan (4.19) dan vektor  $\boldsymbol{\theta}$  diberikan oleh persamaan (4.11), maka

(1) matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  dapat dinyatakan menjadi

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}), \quad (4.29)$$

dengan

$$\mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial a} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial a} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

dimana  $\mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ ,  $q = 1, 2, 3, 4$  masing-masing adalah matriks simetri berukuran  $(1 + m + m(p + 1)) \times (1 + m + m(p + 1))$ .

(2) Berdasarkan persamaan (4.30), bentuk umum elemen-elemen matriks

$$\mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] \text{ dapat dinyatakan secara eksplisit, yaitu}$$

$$(a) \quad \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} = \frac{mn}{a^2} - \frac{2}{a^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 \gamma_k (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}),$$

$$(b) \quad \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma_k} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$(c) \quad \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \beta_{kh}} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \gamma_k X_{hi} \quad k = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, p,$$

$$(d) \quad \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k^2} = -\frac{n}{\gamma_k^2} \text{ untuk } k = l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m;$$

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_l \partial \gamma_k} = 0, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m,$$

$$(e) \quad \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} = \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh} \partial \gamma_k} = 0, \quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m;$$

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \gamma_k} = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n X_{hi}, \quad k = l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m,$$

$$(f) \quad \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}^2} = 0, \quad k = l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m;$$

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{kh^*}} = \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh^*} \partial \beta_{kh}} = 0, \quad k = l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m; \quad h, h^* = 0, 1, \dots, p;$$

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh^*} \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh^*}} = 0, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m; \quad h, h^* = 0, 1, \dots, p.$$

Bukti (1) :

Diketahui fungsi *log-likelihood* model RWM (4.10) diberikan oleh persamaan (4.15), yaitu

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) &= \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) \\ &= \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}), \end{aligned}$$

dengan  $L_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ ,  $q = 1, 2, 3, 4$  masing-masing diberikan oleh persamaan (4.16) sampai dengan (4.19). Berdasarkan Lemma 4.1, vektor gradien dari fungsi *log-likelihood*  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) &= \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \sum_{q=1}^4 \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \sum_{q=1}^4 \mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi (Khuri, 2003), matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  adalah matriks turunan parsial orde kedua dari  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor parameter  $\boldsymbol{\theta}$ . Berdasarkan sifat turunan dari jumlah suatu fungsi, dan memperhatikan persamaan (4.15) dan (4.22), maka matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} = \sum_{q=1}^4 \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} = \sum_{q=1}^4 \mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}). \quad (4.31)$$

Diketahui  $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{\gamma}^T & \boldsymbol{\beta}^T \end{bmatrix}^T$  adalah vektor model RWM berdimensi  $m(p+1)+m+1$  maka  $\mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ ,  $q = 1, 2, 3, 4$  yang diberikan oleh persamaan (4.31) masing-masing adalah matriks simetri berukuran  $(m(p+1)+m+1) \times (m(p+1)+m+1)$  dan mempunyai bentuk umum seperti diberikan oleh persamaan (4.30).

Bukti (2) :

Diketahui  $\boldsymbol{\theta}$  adalah vektor model RWM yang diberikan oleh persamaan (4.11) dan memperhatikan persamaan (4.30) dan (4.31), matriks  $\mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  diberikan oleh

$$\mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial a} & \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial a} & \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix},$$

dan elemen-elemennya dapat dinyatakan secara eksplisit, yaitu

$$(a) \quad \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ -\frac{mn}{a} + \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \gamma_k (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}) \right]$$

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} = \frac{mn}{a^2} - \frac{2}{a^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \gamma_k (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}).$$

(b) Diketahui vektor  $\boldsymbol{\gamma}$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi  $m$ ,

$$\text{sehingga } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\gamma}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma_k} \right]_{(1 \times m)} \text{ adalah matriks } 1 \times m, \text{ dimana}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma_k} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{n}{\gamma_k} - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}) \right] \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}), \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

(c) Diketahui vektor  $\boldsymbol{\beta}$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi

$$m(p+1), \text{ sehingga } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \beta_{kh}} \right]_{(1 \times m(p+1))} \text{ adalah matriks } 1 \times m(p+1)$$

dan

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \gamma_k X_{hi} \right] = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \gamma_k X_{hi}, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$h = 0, 1, \dots, p.$$

(d) Diketahui vektor  $\boldsymbol{\gamma}$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi  $m$ ,

$$\text{sehingga } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} \right]_{(m \times m)} \text{ adalah matriks simetri } m \times m, \text{ dimana}$$

elemen-elemennya dapat dinyatakan

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k^2} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \frac{n}{\gamma_k} - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}) \right] = -\frac{n}{\gamma_k^2}, \quad k = l;$$

$k, l = 1, 2, \dots, m$

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_l \partial \gamma_k} = \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_l} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \frac{n}{\gamma_l} - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}) \right] = 0, \quad k \neq l;$$

$k, l = 1, 2, \dots, m$ .

- (e) Berdasarkan persamaan (4.11),  $\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} \right]_{(m \times m(p+1))}$  adalah matriks

$m \times m(p+1)$ , dimana elemen-elemennya dapat dinyatakan

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\gamma_k} \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\gamma_k} \left[ -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \gamma_k X_{hi} \right] = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n X_{hi}, \quad k = l;$$

$k, l = 1, 2, \dots, m$  dan  $h = 0, 1, \dots, p$ ,

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_l \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \left[ -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \gamma_k X_{hi} \right] = 0, \quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan}$$

$h = 0, 1, \dots, p$ .

- (f) Diketahui vektor  $\boldsymbol{\beta}$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi

$$m(p+1), \text{ sehingga } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh}^*} \right]_{(m(p+1) \times m(p+1))} \text{ adalah matriks simetri}$$

$m(p+1) \times m(p+1)$  dan elemen-elemennya dapat dinyatakan

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}^2} = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \gamma_k X_{hi} \right] = 0, \quad k = l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan}$$

$h = 0, 1, \dots, p$ ,

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{kh}^*} = \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}^* \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}^*} \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}^*} \left[ -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \gamma_k X_{hi} \right] = 0, \quad k = l;$$

$k, l = 1, 2, \dots, m$  dan  $h, h^* = 0, 1, \dots, p$ ,

$$\frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh}^* \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh}^*} = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh}^*} \right] = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \gamma_l X_{hi}^* \right] = 0, \quad k \neq l;$$

$k, l = 1, 2, \dots, m$  dan  $h, h^* = 0, 1, \dots, p$ . ■

### Lemma 4.3

Jika fungsi *log-likelihood* model RWM (4.10) adalah  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  yang diberikan oleh persamaan (4.15) dan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  diberikan oleh persamaan (4.31),

dengan  $\boldsymbol{\theta}$  diberikan oleh persamaan (4.11), maka  $\mathbf{H}_2(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$  adalah

matriks simetri berukuran  $(m(p+1)+m+1) \times (m(p+1)+m+1)$  dan elemen-elemennya dapat dinyatakan dalam bentuk umum sebagai berikut :

$$(a) \quad \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (2mA_i M_i + (a-m)(A_i M_i^* - M_i^2)) A_i^{-2},$$

dimana

$$B_{ki}^* = B_{ki}(\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}) = (y_k)^{\gamma_k/a} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i\right] (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki})^2$$

dan

$$M_i^* = \sum_{k=1}^3 \frac{\gamma_k^2}{a^2} B_{ki}^*,$$

$$(b) \quad \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma_k} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left( \{(a-m)M_i - mA_i\} B_{ki} - \left(\frac{a-m}{a}\right) \gamma_k A_i B_{ki}^* \right) A_i^{-2}, \quad k=1,2,\dots,m,$$

$$(c) \quad \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \beta_{kh}} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left( \{(a-m)M_i - mA_i\} D_{ki} - \left(\frac{a-m}{a}\right) \gamma_k A_i B_{ki} \right) \gamma_k A_i^{-2} X_{hi},$$

$$k=1,2,\dots,m; \quad h=0,1,\dots,p,$$

$$(d) \quad \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k^2} = \frac{a-m}{a^2} \sum_{i=1}^n (A_i B_{ki}^* - B_{ki}^2) A_i^{-2} \quad \text{untuk } k=l, \quad k,l=1,2,\dots,m,$$

$$\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_l \partial \gamma_k} = -\left(\frac{a-m}{a^2}\right) \sum_{i=1}^n B_{li} B_{ki} A_i^{-2}, \quad k \neq l, \quad k,l=1,2,\dots,m,$$

$$(e) \quad \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \gamma_k} = \frac{a-m}{a^2} \sum_{i=1}^n ((A_i - D_{ki}) \gamma_k B_{ki} - a A_i D_{ki}) A_i^{-2} X_{hi}, \quad k=l;$$

$$k,l=1,2,\dots,m \text{ dan } h=0,1,\dots,p,$$

$$\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} = \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh} \partial \gamma_k} = -\left(\frac{a-m}{a^2}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_l D_{li} B_{ki} A_i^{-2} X_{hi}, \quad k \neq l; \quad k,l=1,2,\dots,m \text{ dan}$$

$$h=0,1,\dots,p.$$

$$(f) \quad \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}^2} = \frac{a-m}{a^2} \sum_{i=1}^n (A_i - D_{ki}) \gamma_k^2 D_{ki} A_i^{-2} X_{hi}^2, \quad k=l, \quad k,l=1,2,\dots,m \text{ dan}$$

$$h=0,1,\dots,p,$$

$$\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{kh^*}} = \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh^*} \partial \beta_{kh}} = \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n (A_i - D_{ki}) \gamma_{ki}^2 D_{ki} A_i^{-2} X_{hi} X_{h^*i}, \quad k=l,$$

$$k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h, h^* = 0, 1, \dots, p,$$

$$\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh^*}} = \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh^*} \partial \beta_{kh}} = - \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n \gamma_{li} \gamma_{ki} D_{li} D_{ki} A_i^{-2} X_{hi} X_{h^*i}, \quad k \neq l,$$

$$k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h, h^* = 0, 1, \dots, p.$$

Bukti :

Berdasarkan persamaan (4.30) dan (4.31) pada Lemma 4.2, matriks  $\mathbf{H}_2(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$

adalah simetri yang dinyatakan dalam bentuk  $\mathbf{H}_2(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$  dan berukuran

$(m(p+1)+m+1) \times (m(p+1)+m+1)$ . Berdasarkan persamaan (4.30) dan (4.31), elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_2(\boldsymbol{\theta})$  adalah turunan parsial orde kedua dari fungsi  $L_2(\boldsymbol{\theta})$  yang diberikan oleh persamaan (4.15) terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}$ . Elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_2(\boldsymbol{\theta})$  dapat dinyatakan secara eksplisit, yaitu

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (a U_i - m M_i) A_i^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (2m A_i M_i + (a-m)(A_i M_i^* - M_i^2)) A_i^{-2}, \end{aligned}$$

dengan

$$B_{ki}^* = B_{ki} (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki}) = (y_k)^{\gamma_k/a} \exp \left[ -\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i \right] (\boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i - \ln y_{ki})^2$$

dan

$$M_i^* = \sum_{k=1}^3 \frac{\gamma_k^2}{a^2} B_{ki}^*.$$

$$\text{(b)} \quad \text{Berdasarkan persamaan (4.11), } \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\gamma}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma_k} \right]_{(1 \times m)} \text{ adalah matriks } 1 \times m,$$

dimana

$$\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma_k} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ - \left( \frac{a-m}{a} \right) \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{-1} \right]$$

$$\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma_k} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left( [(a-m)M_i - mA_i]B_{ki} - \left(\frac{a-m}{a}\right)\gamma_k A_i B_{ki}^* \right) A_i^{-2}, \quad k=1,2,\dots,m.$$

(c) Berdasarkan persamaan (4.11),  $\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \beta_{kh}} \right]_{(1 \times m(p+1))}$  adalah matriks

$1 \times m(p+1)$  dan elemen-elemenya dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \beta_{kh}} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ -\left(\frac{a-m}{a}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{-1} X_{hi} \right] \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left( [(a-m)M_i - mA_i]D_{ki} - \left(\frac{a-m}{a}\right)\gamma_k A_i B_{ki} \right) \gamma_k A_i^{-2} X_{hi}, \\ &\quad k=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

(d) Diketahui vektor  $\boldsymbol{\gamma}$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi  $m$ ,

sehingga  $\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} \right]_{(m \times m)}$  adalah matriks simetri  $m \times m$  dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k^2} &= \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ -\left(\frac{a-m}{a}\right) \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{-1} \right] \\ &= \frac{a-m}{a^2} \sum_{i=1}^n (A_i B_{ki}^* - B_{ki}^2) A_i^{-2}, \quad k=l; \quad k,l=1,2,\dots,m. \\ \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} &= \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_l \partial \gamma_k} = \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \left[ -\left(\frac{a-m}{a}\right) \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{-1} \right] \\ &= -\left(\frac{a-m}{a^2}\right) \sum_{i=1}^n B_{li} B_{ki} A_i^{-2}, \quad k \neq l; \quad k,l=1,2,\dots,m. \end{aligned}$$

(e) Diketahui vektor  $\boldsymbol{\gamma}$  dan  $\boldsymbol{\beta}$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) masing-

masing berdimensi  $m$  dan  $m(p+1)$ , sehingga  $\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} \right]_{(m \times m(p+1))}$

adalah matriks  $m \times m(p+1)$  dan elemen-elemenya dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{kh}} &= \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ -\left(\frac{a-m}{a}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{-1} X_{hi} \right] \\ &= \frac{a-m}{a^2} \sum_{i=1}^n ((A_i - D_{ki})\gamma_k B_{ki} - a A_i D_{ki}) A_i^{-2} X_{hi}, \quad k=l; \quad k,l=1,2,\dots,m \\ &\quad \text{dan } h=0,1,\dots,p, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} &= \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh}} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ -\left(\frac{a-m}{a}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_l D_{li} A_i^{-1} X_{li} \right] \\ &= -\left(\frac{a-m}{a^2}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_l D_{li} B_{ki} A_i^{-2} X_{hi}, \quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m; \quad h = 0, 1, \dots, p.\end{aligned}$$

(f) Diketahui vektor  $\boldsymbol{\beta}$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi

$$m(p+1), \text{ sehingga } \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh^*}} \right]_{(m(p+1) \times m(p+1))} \text{ adalah matriks simetri}$$

$m(p+1) \times m(p+1)$  dan elemen-elemennya dinyatakan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}^2} &= \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ -\left(\frac{a-m}{a}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{-1} X_{hi} \right] \\ &= \frac{a-m}{a^2} \sum_{i=1}^n (A_i - D_{ki}) \gamma_k^2 D_{ki} A_i^{-2} X_{hi}^2, \quad k = l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m; \\ &\quad h = 0, 1, \dots, p,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{kh^*}} &= \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh^*} \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh^*}} \left[ \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh^*} \partial \beta_{kh}} \right] \\ &= \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n (A_i - D_{ki}) \gamma_k^2 D_{ki} A_i^{-2} X_{hi} X_{h^*i}, \quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m; \\ &\quad h, h^* = 0, 1, \dots, p,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh^*}} &= \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh^*} \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{lh^*}} \left[ \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] \\ &= -\left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n \gamma_l \gamma_k D_{li} D_{ki} A_i^{-2} X_{hi} X_{h^*i}, \quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m; \\ &\quad h, h^* = 0, 1, \dots, p. \blacksquare\end{aligned}$$

#### Lemma 4.4

Jika fungsi *log-likelihood* model RWM (4.10) adalah  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  yang diberikan oleh persamaan (4.15) dan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  diberikan oleh (4.31), dengan  $\boldsymbol{\theta}$

diberikan oleh persamaan (4.11), maka  $\mathbf{H}_3(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$  adalah matriks simetri

berukuran  $(m(p+1)+m+1) \times (m(p+1)+m+1)$  dan elemen-elemennya dapat dinyatakan dalam bentuk umum sebagai berikut :

$$(a) \quad \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (A_i U_i^* + (a U_i - M_i) U_i) A_i^{-2},$$

dengan

$$U_i^* = M_i \ln A_i + M_i^* ;$$

$$(b) \quad \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma_k} = \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial a} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (\gamma_k A_i B_{li}^* + a(a U_i - M_i) B_{ki}) A_i^{a-2}, \quad k=1, 2, \dots, m;$$

$$(c) \quad \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial a} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (\gamma_k A_i B_{ki} + a(a U_i - M_i) D_{ki}) \gamma_k A_i^{a-2} X_{hi},$$

$$k=1, 2, \dots, m; \quad h=0, 1, \dots, p;$$

$$(d) \quad \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k^2} = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (A_i B_{ki}^* + (a-1) B_{ki}^2) A_i^{a-2}, \quad k=l; \quad k, l=1, 2, \dots, m,$$

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_l \partial \gamma_k} = -\left(\frac{a-1}{a}\right) \sum_{i=1}^n B_{ki} B_{li} A_i^{a-2}, \quad k \neq l; \quad k, l=1, 2, \dots, m;$$

$$(e) \quad \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \gamma_k} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \{(a D_{ki} - \gamma_k B_{ki}) A_i - (a-1) \gamma_k B_{ki} D_{ki}\} A_i^{a-2} X_{hi}, \quad k=l;$$

$$k, l=1, 2, \dots, m; \quad h=0, 1, \dots, p;$$

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} = \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh} \partial \gamma_k} = -\left(\frac{a-1}{a}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_l B_{ki} D_{li} A_i^{a-2} X_{hi}, \quad k \neq l, \quad k, l=1, 2, \dots, m;$$

$$h=0, 1, \dots, p;$$

$$(f) \quad \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}^2} = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (A_i + (a-1) D_{ki}) D_{ki} A_i^{a-2} \gamma_k^2 X_{hi}^2, \quad k=l; \quad k, l=1, 2, \dots, m;$$

$$h=0, 1, \dots, p;$$

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{kh^*}} = \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh^*} \partial \beta_{kh}} = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (A_i + (a-1) D_{ki}) D_{ki} A_i^{a-2} \gamma_k^2 X_{hi} X_{h^*i},$$

$$k=l; \quad k, l=1, 2, \dots, m \text{ dan } h, h^*=0, 1, \dots, p;$$

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh^*}} = \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh^*} \partial \beta_{kh}} = -\left(\frac{a-1}{a}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_k \gamma_l D_{ki} D_{li} A_i^{a-2} X_{hi} X_{h^*i}, \quad k \neq l;$$

$$k, l=1, 2, \dots, m; \quad h, h^*=0, 1, \dots, p.$$

Bukti :

Berdasarkan persamaan (4.30) dan (4.31) pada Lemma 4.2, matriks  $\mathbf{H}_3(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$

dinyatakan dalam bentuk umum  $\mathbf{H}_3(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$  adalah matriks simetri

$(m(p+1)+m+1) \times (m(p+1)+m+1)$ . Berdasarkan persamaan (4.30) dan (4.31), elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_3(\boldsymbol{\theta})$  adalah turunan parsial orde kedua dari fungsi  $L_3(\boldsymbol{\theta})$  yang diberikan oleh persamaan (4.18), terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}$ . Elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_3(\boldsymbol{\theta})$  dapat dinyatakan secara eksplisit, yaitu

$$(a) \quad \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ -\sum_{i=1}^n (A_i \ln A_i + M_i) A_i^{a-1} \right]$$

$$= -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (A_i U_i^* + (a U_i - M_i) U_i) A_i^{-2},$$

dengan

$$U_i^* = M_i \ln A_i + M_i^*$$

$$(b) \quad \text{Berdasarkan persamaan (4.11), } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma_k} \right]_{(1 \times m)} \text{ adalah matriks } 1 \times m$$

dan

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \gamma_k} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{a-1} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (\gamma_k A_i B_{li}^* + a(a U_i - M_i) B_{ki}) A_i^{a-2}; \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$(c) \quad \text{Berdasarkan persamaan (4.11), } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \beta_{kh}} \right]_{(1 \times m(p+1))} \text{ adalah matriks}$$

$1 \times m(p+1)$  dan elemen-elemennya dapat dinyatakan

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{a-1} X_{hi} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (\gamma_k A_i B_{ki} + a(a U_i - M_i) D_{ki}) \gamma_k A_i^{a-2} X_{hi}, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

(d) Diketahui vektor  $\gamma$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi  $m$ ,

sehingga  $\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \gamma^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} \right]_{(m \times m)}$  adalah matriks simetri  $m \times m$  dan

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k^2} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{a-1} \right] = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (A_i B_{ki}^* + (a-1) B_{ki}^2) A_i^{a-2},$$

$$k = l ; k, l = 1, 2, \dots, m ;$$

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_l \partial \gamma_k} = \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \left[ \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{a-1} \right] = -\left(\frac{a-1}{a}\right) \sum_{i=1}^n B_{ki} B_{li} A_i^{a-2},$$

$$k \neq l ; k, l = 1, 2, \dots, m ;$$

(e) Diketahui vektor  $\gamma$  dan  $\beta$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) masing-

masing berdimensi  $m$  dan  $m(p+1)$ , sehingga  $\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} \right]_{(m \times m(p+1))}$

adalah matriks  $m \times m(p+1)$  dan bentuk umum elemen-elemennya adalah

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{a-1} X_{hi} \right]$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \{ (a D_{ki} - \gamma_k B_{ki}) A_i - (a-1) \gamma_k B_{ki} D_{ki} \} A_i^{a-2} X_{hi}, \quad k = l ;$$

$$k, l = 1, 2, \dots, m ; \quad h = 0, 1, \dots, p ;$$

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh}} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \sum_{i=1}^n \gamma_l D_{li} A_i^{a-1} X_{hi} \right] = -\left(\frac{a-1}{a}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_l B_{ki} D_{li} A_i^{a-2} X_{hi},$$

$$k \neq l ; k, l = 1, 2, \dots, m ; \quad h = 0, 1, \dots, p ;$$

(f) Diketahui vektor  $\beta$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi

$m(p+1)$ , sehingga  $\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta \partial \beta^T} = \left[ \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh}} \right]_{(m(p+1) \times m(p+1))}$  adalah matriks simetri

$m(p+1) \times m(p+1)$  dan elemen-elemennya dapat dinyatakan

$$\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}^2} = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{a-1} X_{hi} \right],$$

$$= -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (A_i + (a-1) D_{ki}) D_{ki} A_i^{a-2} \gamma_k^2 X_{hi}^2, \quad k = l ; k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan}$$

$$h = 0, 1, \dots, p ;$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh^*}} &= \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{lh^*} \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{lh^*}} \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta_{lh^*}} \left[ \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{a-1} X_{hi} \right] \\
&= -\left(\frac{a-1}{a}\right) \sum_{i=1}^n \gamma_k \gamma_l D_{ki} D_{li} A_i^{a-2} X_{hi} X_{h^*i}, \quad k \neq l; \quad k, l = 0, 1, \dots, m \text{ dan} \\
&\quad h, h^* = 0, 1, \dots, p; \\
\frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{kh^*}} &= \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh^*} \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh^*}} \left[ \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{kh}} \right], \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta_{kh^*}} \left[ \sum_{i=1}^n \gamma_k D_{ki} A_i^{a-1} X_{hi} \right] \\
&= -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (A_i + (a-1)D_{ki}) D_{ki} A_i^{a-2} \gamma_k^2 X_{hi} X_{h^*i}, \quad k = l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m \\
&\text{dan } h, h^* = 0, 1, \dots, p. \blacksquare
\end{aligned}$$

#### Lemma 4.5

Jika fungsi *log-likelihood* model RWM (4.10) adalah  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  yang diberikan oleh persamaan (4.15) dan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  diberikan oleh (4.31), dengan  $\boldsymbol{\theta}$  diberikan oleh persamaan (4.11), maka

$$(1) \quad \mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] \quad \text{adalah} \quad \text{matriks} \quad \text{simetri} \quad \text{berukuran}$$

$(m(p+2)+1) \times (m(p+2)+1)$  dan dapat dinyatakan

$$\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i^2} \left( \left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] Q_i - \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T \right), \quad (4.32)$$

dengan  $\left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T$  adalah matriks simetri yang mempunyai ordo

$(m(p+1)+m+1) \times (m(p+1)+m+1)$ .

$$(2) \quad \text{Matriks} \quad \left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] \text{ adalah matriks simetri yang dinyatakan dalam bentuk}$$

umum

$$\left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial a} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial a} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

dan elemen-elemennya dapat dinyatakan dalam bentuk umum sebagai berikut

$$(a) \quad \frac{\partial^2 Q_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell} \left( M_i \frac{\partial C(m, \ell, a)}{\partial a} + a A_i C^{(2)}(m, \ell, a) \right) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell} \left( (\ell-1) \left[ \frac{\partial C(m, \ell, a)}{\partial a} U_i + C(m, \ell, a) U_i^* \right] \right) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell} \left( A_i \frac{\partial C(m, \ell, a)}{\partial a} + (\ell-1) C(m, \ell, a) U_i \right) (a(\ell-1) U_i - M_i) A_i^{(\ell-1)a-2};$$

$$(b) \quad \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \gamma_k} = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial a}$$

$$= \frac{1}{a^2} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} \gamma_k B_{ki}^* (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} B_{ki} (\ell-1) C^{(1)}(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} B_{ki} (\ell-1) C(m, \ell, a) [a(\ell-1) U_i - M_i] A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

$$(c) \quad \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial a} = \frac{1}{a^2} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} \gamma_k^2 B_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} \gamma_k D_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) [a(\ell-1) U_i - M_i] A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, m.$$

$$(d) \quad \frac{\partial^2 Q_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k^2} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} (\ell-1) B_{ki}^* C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) B_{ki} C(m, \ell, a) [a(\ell-1) U_i - M_i] A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k = l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m,$$

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \gamma_l} = \frac{\partial^2 Q_i}{\gamma_l \partial \gamma_k} = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} (\ell-1)((\ell-1)a-1) B_{ki} B_{li} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k \neq l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m;$$

$$(e) \quad \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial \gamma} = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} D_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k B_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k B_{ki} D_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) [(\ell-1)a-1] A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k = l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, p,$$

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{lh} \partial \gamma_k}$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_l D_{li} B_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) [(\ell-1)a-1] A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k \neq l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, p;$$

$$(f) \quad \frac{\partial^2 Q_i(\theta)}{\partial \beta_{kh}^2} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k^2 D_{ki} X_{hi}^2 (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k^2 D_{ki}^2 X_{hi}^2 (\ell-1) [(\ell-1)a-1] C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k = l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m, \quad h = h^* \text{ dan } h, h^* = 0, 1, \dots, p;$$

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{kh^*}} = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh^*} \partial \beta_{kh}}$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k^2 D_{ki} X_{hi} X_{h^*i} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k^2 D_{ki}^2 X_{hi} X_{h^*i} (\ell-1) C(m, \ell, a) [(\ell-1)a-1] A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k = l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h, h^* = 0, 1, \dots, p;$$

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh^*}} = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{lh^*} \partial \beta_{kh}}$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k \gamma_l D_{ki} D_{li} X_{hi} X_{h^*i} (\ell-1) [(\ell-1)a-1] C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k \neq l; k, l = 1, 2, \dots, m; h, h^* = 0, 1, \dots, p.$$

Bukti (1) :

Berdasarkan persamaan (4.30) dan (4.31) pada Lemma 4.2, matriks  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$

dinyatakan dalam bentuk  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$  adalah matriks simetri berukuran

$(m(p+1)+m+1) \times (m(p+1)+m+1)$ . Berdasarkan persamaan (4.30) dan (4.31),

elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta})$  adalah turunan parsial orde kedua dari fungsi

$L_4(\boldsymbol{\theta})$  yang diberikan oleh persamaan (4.19) terhadap semua kombinasi

komponen-komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}$ . Penurunan parsial orde kedua fungsi  $L_4(\boldsymbol{\theta})$

terhadap semua kombinasi komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}$  dilakukan menggunakan aturan

rantai sehingga diperoleh bentuk umum matriks  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta})$ , yaitu

$$\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_4(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i^2} \left( \left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] Q_i - \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T \right). \quad (4.34)$$

Diketahui vektor  $\boldsymbol{\theta}$  berdimesi  $m(p+2)+1$ , sehingga  $\left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T$  adalah

matriks simetri berukuran  $(m(p+1)+m+1) \times (m(p+1)+m+1)$ .

Bukti (2) :

Berdasarkan formula (4.34), elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta})$  dapat diperoleh

dengan menentukan semua turunan parsial orde kedua fungsi  $Q_i$  terhadap semua

kombinasi komponen-komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}$ . Berdasarkan persamaan persamaan

(4.11), matriks  $\left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$  dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu

$$\left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial a} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial a} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Elemen-elemen matriks  $\left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$  dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu



$$\begin{aligned}
(a) \quad \frac{\partial^2 Q_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial Q_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell} \left[ A_i \frac{\partial C(m, \ell, a)}{\partial a} + (\ell-1) U_i C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right] \right] \\
\frac{\partial^2 Q_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} &= \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell} \left( M_i \frac{\partial C(m, \ell, a)}{\partial a} + a A_i C^{(2)}(m, \ell, a) \right) A_i^{(\ell-1)a-1} + \\
&\quad \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell} \left( (\ell-1) [C^{(1)}(m, \ell, a) U_i + C(m, \ell, a) U_i^*] \right) A_i^{(\ell-1)a-1} + \\
&\quad \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell} \left( A_i C^{(1)}(m, \ell, a) + (\ell-1) C(m, \ell, a) U_i \right) (a(\ell-1) U_i - M_i) A_i^{(\ell-1)a-2}
\end{aligned}$$

(b) Diketahui vektor  $\boldsymbol{\gamma}$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi  $m$ ,

$$\text{sehingga } \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \boldsymbol{\gamma}^T} = \left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \gamma_k} \right]_{(1 \times m)} \text{ adalah matriks } 1 \times m \text{ dan elemen-elemennya}$$

dapat dinyatakan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \gamma_k} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) B_{ki} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right] \\
&= \frac{1}{a^2} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} \gamma_k B_{ki}^* (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} + \\
&\quad \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} B_{ki} (\ell-1) C^{(1)}(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} + \\
&\quad \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} B_{ki} (\ell-1) C(m, \ell, a) [a(\ell-1) U_i - M_i] A_i^{(\ell-1)a-2}, \\
&\quad k = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}$$

(c) Diketahui vektor  $\boldsymbol{\beta}$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi

$$m(p+1), \text{ sehingga } \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \beta_{kh}} \right]_{(1 \times m(p+1))} \text{ adalah matriks berukuran}$$

$1 \times m(p+1)$  dan elemen-elemennya dapat dinyatakan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \beta_{kh}} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{kh}} \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \gamma_k D_{ki} X_{hi} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right] \\
&= \frac{1}{a^2} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} \gamma_k^2 B_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +
\end{aligned}$$

$$\sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} \gamma_k D_{ki} X_{hi} (\ell-1) C^{(1)}(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} \gamma_k D_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) [a(\ell-1)U_i - M_i] A_i^{(\ell-1)a-2}.$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

(d) Diketahui vektor  $\gamma$  yang diberikan oleh persamaan (4.11) berdimensi  $m$ ,

sehingga  $\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma \partial \gamma^T} = \left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} \right]_{(m \times m)}$  adalah matriks  $m \times m$  dan elemen-

elemennya dapat dinyatakan

$$\frac{\partial^2 Q_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k^2} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \frac{\partial Q_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) B_{ki} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right]$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} (\ell-1) B_{ki}^* C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) B_{ki} C(m, \ell, a) [a(\ell-1)U_i - M] A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k = l \text{ dan } k, l = 1, 2, \dots, m$$

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) B_{ki} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right]$$

$$= \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} (\ell-1) ((\ell-1)a-1) B_{ki} B_{li} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k \neq l \text{ dan } k, l = 1, 2, \dots, m.$$

(e) Berdasarkan persamaan (4.11),  $\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} \right]_{(m \times m(p+1))}$  adalah matriks

$m \times m(p+1)$  dan elemen-elemennya dapat dinyatakan dalam formula umum

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \gamma_k D_{ki} X_{hi} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right]$$

$$= \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} D_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k B_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} +$$

$$\frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k B_{ki} D_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) [(\ell-1)a-1] A_i^{(\ell-1)a-2},$$

$$k = l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, p,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} &= \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{lh} \partial \gamma_k} = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[ \gamma_l D_{li} X_{hi} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right] \\ &= \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_l D_{li} B_{ki} X_{hi} (\ell-1) C(m, \ell, a) [(\ell-1)a-1] A_i^{(\ell-1)a-2}, \end{aligned}$$

$$k \neq l, \quad k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, p.$$

(f) Diketahui vektor  $\beta$  yang diberikan persamaan (4.11) berdimensi

$$m(p+1) \times m(p+1), \text{ sehingga } \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta \partial \beta^T} = \left[ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh}^*} \right]_{(m(p+1) \times m(p+1))} \text{ adalah matriks}$$

simetri  $m(p+1) \times m(p+1)$ , dimana elemen-elemennya dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_i(\theta)}{\partial \beta_{kh}^2} &= \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ \frac{\partial Q_i(\theta)}{\partial \beta_{kh}} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}} \left[ \gamma_k D_{ki} X_{hi} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right] \\ &= \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k^2 D_{ki}^2 X_{hi}^2 (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} + \\ &\quad \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k^2 D_{ki}^2 X_{hi}^2 (\ell-1) [(\ell-1)a-1] C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-2}, \end{aligned}$$

$$k = l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h = 0, 1, \dots, p;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{kh}^*} &= \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh}^* \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}^*} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{kh}} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_{kh}^*} \left[ \gamma_k D_{ki} X_{hi} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right] \\ &= \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k^2 D_{ki}^2 X_{hi} X_{h^*i} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} + \\ &\quad \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k^2 D_{ki}^2 X_{hi} X_{h^*i} (\ell-1) C(m, \ell, a) [(\ell-1)a-1] A_i^{(\ell-1)a-2}, \end{aligned}$$

$$k = l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h, h^* = 0, 1, \dots, p;$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh^*}} &= \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{lh^*} \partial \beta_{kh}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{lh^*}} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{kh}} \right] \\
\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh^*}} &= \frac{\partial}{\partial \beta_{lh^*}} \left[ \gamma_k D_{ki} X_{hi} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+1} (\ell-1) C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-1} \right] \\
&= \frac{1}{a} \sum_{\ell=1}^m (-1)^{m+\ell+2} \gamma_k \gamma_l D_{ki} D_{li} X_{hi} X_{h^*i} (\ell-1) [(\ell-1)a-1] C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a-2}, \\
&\quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m \text{ dan } h, h^* = 0, 1, \dots, p. \blacksquare
\end{aligned}$$

Tahapan selanjutnya setelah penentuan komponen-komponen vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$  dan elemen-elemen matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$  adalah melakukan penaksiran parameter  $\boldsymbol{\theta}$  menggunakan metode MLE. Berdasarkan persamaan (4.15), persamaan *likelihood* model RWM tidak *closed form*, sehingga solusi eksak persamaan *likelihood* untuk mendapatkan penaksir ML parameter model RWM tidak dapat diperoleh secara analitikal. Metode alternatif untuk mendapatkan penaksir ML adalah metode iteratif Newton-Raphson. Proses iterasi untuk mendapatkan penaksir ML parameter RWM menggunakan algoritma Newton-Raphson adalah

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}), \quad q^* = 0, 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

Berdasarkan persamaan (4.19), dan (4.34), model khusus fungsi  $Q_i$  pada model regresi Weibull trivariat adalah

$$Q_i = a(a-1)a(-2) - 3a^2(a-1)A_i^a + a^3A_i^{2a},$$

dengan

$$A_i = \sum_{k=1}^3 (y_{ki})^{\gamma_k/a} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i\right].$$

Hasil penentuan turunan orde pertama dan kedua fungsi  $Q_i$  dipergunakan pada penaksiran parameter model RWM dan GWMWR, yang dibahas pada penerapan model RWM pada data indikator pencemaran air. Turunan parsial orde pertama  $Q_i$  terhadap semua komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}$  adalah

sebagai berikut :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial a} = \kappa_i + \phi_i U_i A_i^{a-1},$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \gamma_k} = -\phi B_{ki} A_i^{a-1}, \text{ untuk } k=1,2,3$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{kh}} = -\phi \gamma_k D_{ki} X_{hi} A_i^{a-1}, \text{ untuk } k=1,2,\dots,3 \text{ dan } h=0,1,2,\dots,p,$$

dengan

$$\kappa_i = 3[(a-1)^2 - a(3a-2)A_i^a + a^2 A_i^{2a}] - 1,$$

$$\phi_i = 2a^3 A_i^a - 3a^2(a-1).$$

Turunan parsial orde kedua dari  $Q_i$ , untuk  $k,l=1,2,3$  dan  $h,h^*=0,1,2,\dots,p$  adalah

$$(a). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a^2} = \varphi_{1i} + \varphi_{5i} U_i + \varphi_{6i} U_i^*,$$

dengan

$$\varphi_{1i} = 6(a-1) - 6(3a-1)A_i^a + 6aA_i^{2a}; \varphi_{2i} = 6a^2 A_i^{2a-1} - 3a(3a-2)A_i^{a-1};$$

$$\varphi_{3i} = 2a^3 U_i A_i^{2a-2}; \varphi_{4i} = \frac{\phi_i}{a} (aU_i - M_i) A_i^{a-2}; \varphi_{5i} = 2\varphi_{2i} + \varphi_{3i} + \varphi_{4i};$$

$$\varphi_{6i} = \frac{\phi_i}{a} A_i^{a-1}.$$

$$(b). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k^2} = \frac{1}{a} (\rho_i B_{ki}^2 + \phi_i A_i B_k^*) A_i^{a-2},$$

dengan

$$\rho_i = 2a^4 A_i^a + (a-1)\phi_i.$$

$$(c). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh}^2} = \frac{1}{a} (\rho_i D_{ki} + \phi_i A_i) D_{ki} A_i^{a-2} \gamma_k^2 X_{hi}^2.$$

$$(d). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \gamma_k} = -(\varphi_{2i} + \varphi_{3i}) B_{ki} - V_{ki} A_i^{a-2},$$

dengan

$$V_{ki} = \frac{1}{a^2} [\gamma_k A_i B_{ki}^* + a(aU_i - M_i) B_{ki}] \phi_i$$

$$(e). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \beta_{kh}} = -(\varphi_{2i} + \varphi_{3i}) \gamma_k D_{ki} X_{hi} - N_{ki} A_i^{a-2} X_{hi},$$

dengan

$$N_{ki} = \frac{1}{a^2} [\gamma_k A_i B_{ki} + a(aU_i - M_i) D_{ki}] \phi_i \gamma_k .$$

$$(f). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \beta_{kh}} = \frac{1}{a} \rho_i \gamma_k B_{ki} D_{ki} A_i^{a-2} X_{hi} + \frac{1}{a} (\gamma_k B_{ki} - a D_{ki}) \phi_i A_i^{a-1} X_{hi} .$$

$$(g). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{lh}^*} = \frac{1}{a} \rho_i \gamma_k \gamma_l D_{ki} D_{li} X_{hi} X_{h^*i} A_i^{a-2} .$$

$$(h). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \beta_{kh} \partial \beta_{kh}^*} = \frac{1}{a} (\rho_i D_{ki} + \phi_i A_i) \gamma_k^2 D_{ki} A_i^{a-2} X_{hi} X_{h^*i} .$$

$$(i). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \beta_{lh}} = \frac{1}{a} \rho_i B_{ki} \gamma_l D_{li} A_i^{a-2} X_{hi} .$$

$$(j). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = \frac{1}{a} \rho_i B_{ki} B_{li} A_i^{a-2} .$$

#### 4.4. Algoritma Penaksiran Parameter Model RWM

Pada sub-bab ini dikemukakan algoritma penaksiran parameter model RWM. Algoritma penaksiran parameter model RWM secara numerik menggunakan metode Newton-Raphson adalah

1. Menginput data pengamatan respon  $(y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{mi})$  dan data pengamatan kovariat  $(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi})$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Mendefinisikan fungsi *likelihood*  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  dan fungsi *log-likelihood*  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ .
3. Menentukan batas toleransi  $(\varepsilon)$  untuk  $\|\boldsymbol{\theta}^{(q+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(q)}\|$  sehingga proses iterasi Newton-Raphson dihentikan. Nilai toleransi pada proses iterasi Newton-Raphson adalah  $\varepsilon = 10^{-12}$ .
4. Menentukan nilai awal untuk iterasi Newton-Raphson :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = [\hat{a}^{(0)} \hat{\gamma}_1^{(0)} \dots \hat{\gamma}_m^{(0)} \hat{\beta}_{10}^{(0)} \dots \hat{\beta}_{1p}^{(0)} \hat{\beta}_{20}^{(0)} \dots \hat{\beta}_{2p}^{(0)} \dots \hat{\beta}_{m0}^{(0)} \dots \hat{\beta}_{mp}^{(0)}]^T .$$

Nilai awal untuk parameter  $a$  adalah pada interval  $0 < a^{(0)} \leq 1,00$ , nilai awal parameter  $\gamma_k$  untuk  $k = 1, 2, \dots, m$  masing-masing adalah penaksir ML parameter bentuk pada FKP univariat. Nilai awal parameter  $\beta_{k0}$  untuk

$k = 1, 2, \dots, m$  masing-masing adalah  $\ln(\hat{\lambda}_k)$  dengan  $\hat{\lambda}_k$  adalah penaksir ML parameter skala pada FKP univariat, dan nilai awal parameter  $\beta_{kh}$  untuk  $k = 1, 2, \dots, m$  dan  $h = 1, 2, \dots, p$  masing-masing adalah 0.

5. Menghitung komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)}), \mathbf{g}_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)}), \mathbf{g}_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})$  dan  $\mathbf{g}_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})$  seperti pada Lemma 4.1, dengan menggunakan formula

$$\frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial a}, \frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \gamma_1}, \dots, \frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \gamma_m},$$

dan

$$\frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \beta_{k0}}, \frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \beta_{k1}}, \dots, \frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \beta_{kp}}, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, m \text{ dan } q = 1, 2, 3, 4,$$

dimana  $\frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \gamma_k}$  adalah nilai  $\frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_k}$  dievaluasi pada  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)}$  yaitu nilai penaksir  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  setelah iterasi ke- $q^*$ .

6. Menentukan vektor gradien  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})$  berdasarkan penghitungan tahap 5, yaitu

$$\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)}) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{g}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)}).$$

7. Menghitung elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)}), \mathbf{H}_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)}), \mathbf{H}_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})$  dan

$\mathbf{H}_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})$  berdasarkan Teorema 4.1, yaitu (pakai Hq)

$$\frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial a \partial \boldsymbol{\theta}^T}, \frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \gamma_1 \partial \boldsymbol{\theta}^T}, \dots, \frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \gamma_m \partial \boldsymbol{\theta}^T}$$

dan

$$\frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \beta_{k0} \partial \boldsymbol{\theta}^T}, \frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \beta_{k1} \partial \boldsymbol{\theta}^T}, \dots, \frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)})}{\partial \beta_{kp} \partial \boldsymbol{\theta}^T},$$

dengan

$$\boldsymbol{\theta} = [a \ \gamma_1 \ \dots \ \gamma_m \ \boldsymbol{\beta}^T]^T, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, m \text{ dan } q = 1, 2, 3, 4.$$

8. Menentukan matriks Hessian berdasarkan hasil perhitungan tahap 7 yaitu

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)}) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{H}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q*)}).$$

9. Menjalankan proses iterasi Newton-Raphson untuk menentukan penaksir parameter  $\theta$  :

$$\hat{\theta}^{(q+1)} = \hat{\theta}^{(q)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}^{(q)})\mathbf{g}(\hat{\theta}^{(q)}), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

10. Mengevaluasi proses iterasi Newton-Raphson. Jika nilai  $\|\theta^{(q+1)} - \theta^{(q)}\| < \varepsilon$  dengan  $\varepsilon = 10^{-12}$  maka proses iterasi dihentikan dan dilanjutkan ke-tahap 11, jika tidak, proses iterasi dilanjutkan (diulang) mulai tahap 4 dan seterusnya.

11. Menentukan penaksir ML,  $\hat{\theta} = \hat{\theta}^{(q+1)}$

12. Output matriks Hessian  $\mathbf{H}(\hat{\theta})$  dan invers matriks informasi Fisher, yaitu  $[\mathbf{I}(\hat{\theta})]^{-1} = [-\mathbf{H}(\hat{\theta})]^{-1}$

13. Selesai

#### 4.5. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM secara Serentak

Pengujian hipotesis parameter regresi model RWM terdiri dari pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak dan secara parsial. Pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak bertujuan untuk mengkonfirmasi apakah parameter-parameter regresi secara serentak berpengaruh terhadap FKP atau model RWM. Pengujian parameter regresi secara serentak juga bertujuan untuk menguji kelayakan model RWM, yakni model RWM layak bila kesimpulan pengujian hipotesis adalah menolak  $H_0$ . Tahapan dalam pengujian hipotesis adalah penetapan hipotesis, penentuan statistik uji, penentuan distribusi statistik uji dan penentuan daerah penolakan  $H_0$ . Pembahasan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM diperlukan beberapa teorema yang mendasari penentuan distribusi statistik uji dan daerah penolakan untuk hipotesis nol. Berikut ini dikemukakan teorema-teorema yang mendasari penentuan distribusi statistik uji pada pengujian hipotesis parameter regresi model RWM.

##### Teorema 4.1

Diberikan  $\hat{\theta}$  penaksir ML parameter  $\theta$ , yaitu parameter model RWM (4.10). Jika kondisi-kondisi regularitas R1, R2 dan R3 dipenuhi, maka

$$(a). \quad \hat{\theta}_n \xrightarrow{d} \mathbf{N}\left(\theta, [\mathbf{I}(\hat{\theta})]^{-1}\right), n \rightarrow \infty$$



$$(b). (\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}), n \rightarrow \infty, \quad (4.37)$$

dengan  $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})] = -E \left[ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$  adalah matriks informasi Fisher.

**Bukti :**

Pembuktian Teorema 4.1 (a) dan (b) pada pembahasan ini digabung karena mempunyai tahapan pembuktian yang sama dan saling terkait. Diketahui  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  yang diberikan oleh persamaan (4.15) adalah fungsi *log-likelihood* FKP bersama distribusi Weibull multivariat (4.10) dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi melalui hubungan yang didefinisikan pada (4.8). Diketahui  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  adalah fungsi kontinu untuk semua harga  $\mathbf{y}_i = (y_{li}, \dots, y_{mi})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , dan memenuhi kondisi-kondisi regularitas R1, R2 dan R3 (Serfling, 1980; Rinne, 2009). Diketahui vektor  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$  adalah penaksir ML parameter  $\boldsymbol{\theta}$ , yakni parameter model RWM (4.10), maka

$$\frac{\partial L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{0}, \quad (4.38)$$

dengan  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \partial L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) / \partial \boldsymbol{\theta}$  adalah vektor gradien yang diberikan oleh persamaan (4.12) yang dievaluasi pada  $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ . Fungsi  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{0}$  dikembangkan (diekspansikan) kedalam deret Taylor disekitar  $\boldsymbol{\theta}_0$  sampai dua suku dan didapat

$$\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{0} \quad (4.39)$$

dengan  $\boldsymbol{\theta}_0$  adalah nilai sebenarnya dari parameter  $\boldsymbol{\theta}$ , serta  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  diantara  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$  dan  $\boldsymbol{\theta}_0$  yakni  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tau \hat{\boldsymbol{\theta}}_n + (1 - \tau) \boldsymbol{\theta}_0$  untuk sembarang bilangan riil  $0 < \tau < 1$ . Persamaan (4.39) dapat ditulis

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) &= \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathbf{H}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{0} \text{ atau} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 &= [\mathbf{H}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Kedua ruas persamaan (4.40) dikalikan dengan  $\sqrt{n}$  didapat

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) = [-\mathbf{H}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} (\sqrt{n} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0)) \quad (4.41)$$

Diketahui  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0\| \leq \varepsilon) = 1$  dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \leq \varepsilon) = 1$  untuk semua  $\varepsilon > 0$

yang cukup kecil, serta turunan-turunan parsial orde kedua dari  $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  adalah fungsi yang kontinu, maka

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} [-\mathbf{H}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}(\sqrt{n}\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

Dengan membagi  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$  dan  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$  masing-masing oleh  $n$  didapat

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} [-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}(\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)), \quad (4.42)$$

dengan  $\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{1}{n}\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0)$ .

Karena untuk  $n \rightarrow \infty$  berlaku

$$E(\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)) = \frac{\sqrt{n}}{n}E(\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0)) \quad \text{dan} \quad \text{Var}(\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0)) = \frac{1}{n}\text{Var}(\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_0)) \rightarrow -E[\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)],$$

maka

$$\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, -E[\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]). \quad (4.43)$$

Karena untuk  $n \rightarrow \infty$  berlaku  $-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) \rightarrow -E[\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]$ , maka

$$[-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathbf{N}\left(\mathbf{0}, \left\{-E[-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]\right\}^{-1}\left\{-E[-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]\right\}\left\{-E[-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]\right\}^{-1}\right),$$

atau

$$[-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}\sqrt{n}\bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathbf{N}\left(\mathbf{0}, \left\{-E[-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]\right\}^{-1}\right). \quad (4.44)$$

Dari (4.42) didapat  $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathbf{N}\left(\mathbf{0}, \left\{-E[-\frac{1}{n}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)]\right\}^{-1}\right),$

atau ekuivalen

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}), n \rightarrow \infty, \quad (4.45)$$

dan berdasarkan (4.45) didapat

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_0, [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}), n \rightarrow \infty. \quad (4.46)$$

Diketahui  $\theta_0$  adalah nilai sebenarnya dari parameter  $\theta$  dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|\hat{\theta}_n - \theta_0\| \leq \varepsilon) = 1$ , maka dari persamaan (4.45) dan (4.46) didapat

$$(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(\theta, [I(\hat{\theta})]^{-1}), n \rightarrow \infty$$

dan

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{d} N(\theta, [I(\hat{\theta})]^{-1}), n \rightarrow \infty. \blacksquare$$

#### Lemma 4.6

Jika  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_n$  adalah penaksir ML parameter model RWM (4.10), maka

$$[I(\hat{\theta})]^{1/2}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(\theta, I_{b^*}), n \rightarrow \infty,$$

dimana  $[I(\theta)]$  adalah matriks informasi Fisher dan  $I_{b^*}$  adalah matriks identitas berukuran  $b^* \times b^*$ , dengan  $b^* = m(p+2)+1$ , yakni banyaknya parameter model RWM.

#### Bukti :

Diketahui  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_n$  adalah penaksir ML parameter model RWM, maka berdasarkan sifat penaksir ML,  $\hat{\theta}$  adalah penaksir tak bias untuk  $\theta$ . Berdasarkan Teorema 4.1, bahwa  $(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(\theta, [I(\hat{\theta})]^{-1}), n \rightarrow \infty$ , yakni  $(\hat{\theta} - \theta)$  adalah vektor berdimensi  $b^*$  berdistribusi normal standar multivariat asimtotik dengan  $b^* = m(p+2)+1$  adalah banyaknya parameter model RWM (4.10). Diketahui invers dari matriks varians-kovarian adalah matriks *positive definite*, sehingga  $[I(\hat{\theta})] = \hat{\Sigma}^{-1}$  adalah matriks *positive definite*, dan semua nilai eigennya adalah riil positif, yakni  $\lambda_k^* > 0$  untuk  $k = 1, 2, \dots, b^*$  (Rencher, 2000).

Diketahui  $V$  adalah matriks ortogonal, yaitu matriks vektor eigen dari  $[I(\hat{\theta})]$  yang dinormalkan, maka terdapat matriks  $\Lambda^{1/2}$  sedemikian sehingga

$$[I(\theta)]^{1/2} = V\Lambda^{1/2}V^{-1} \text{ dan } [I(\theta)] = V\Lambda V^{-1}, \quad (4.47)$$

dengan  $\Lambda^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1^*}, \sqrt{\lambda_2^*}, \dots, \sqrt{\lambda_{b^*}^*})$ , yaitu matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal utama adalah akar dari nilai eigen yang bersesuaian dari matriks  $[I(\hat{\theta})]$  (Pawitan, 2001). Berdasarkan persamaan (4.47), terdapat matriks  $[I(\hat{\theta})]^{1/2}$

sedemikian sehingga  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2}[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} = [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]$ , dimana matriks  $\mathbf{V}$  dan  $\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$  masing-masing adalah matriks yang invertibel. Diketahui  $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1/2} = \left([\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{1/2}\right)^{-1}$  dan  $\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} = [\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}]^{-1}$ , maka

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{1/2} [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1/2} &= \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^{-1} \left( \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^{-1} \right)^{-1} = (\mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^{-1}) (\mathbf{V} [\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}]^{-1} \mathbf{V}^{-1}) \\ &= (\mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^{-1}) (\mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{V}^{-1}) = \mathbf{I}_{b^*}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

dan

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1/2} [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{1/2} &= \left( \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^{-1} \\ &= (\mathbf{V} [\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}]^{-1} \mathbf{V}^{-1}) (\mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^{-1}) \\ &= (\mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{V}^{-1}) (\mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^{-1}) = \mathbf{I}_{b^*}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Berdasarkan persamaan (4.48) dan (4.49), matriks  $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{1/2}$  adalah invertibel, yakni  $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1/2} = \left([\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{1/2}\right)^{-1} = \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{V}^{-1}$ . Berdasarkan (4.47), (4.48) dan (4.49) didapat

$$E([\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})) = [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$$

dan

$$\begin{aligned} \text{Var}([\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})) &= [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \left([\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2}\right)^T \\ &= [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} \\ &= [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} \left([\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2}\right)^{-1} [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} \\ &= \left([\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1/2}\right) \left([\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1/2} [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2}\right) \\ &= \mathbf{I}_{b^*} \mathbf{I}_{b^*} = \mathbf{I}_{b^*}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Berdasarkan persamaan (4.50) diperoleh kesimpulan bahwa vektor  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$  berdistribusi normal standar multivariat asimtotik, yaitu

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{b^*}), n \rightarrow \infty,$$

dengan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  adalah penaksir ML parameter model RWM (4.10), dengan  $b^* = 1 + m + m(p+1)$ . ■

### Teorema 4.2

Jika  $\boldsymbol{\theta}$  adalah parameter model RWM (4.10) dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n$  adalah penaksir ML parameter  $\boldsymbol{\theta}$  dengan  $L(\boldsymbol{\theta})$  adalah fungsi *log-likelihood*, maka

- (a)  $2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\boldsymbol{\theta})) \approx (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$
- (b)  $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \chi_{b^*}^2, n \rightarrow \infty$

Bukti (a) :

Diketahui  $L(\boldsymbol{\theta})$  adalah fungsi *log-likelihood* yang diberikan oleh persamaan (4.15), dengan  $\boldsymbol{\theta}$  adalah parameter model RWM (4.10). Fungsi *log-likelihood*  $L(\boldsymbol{\theta})$  dikembangkan (diekspansikan) kedalam deret Taylor disekitar  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  sampai suku yang memuat turunan parsial orde kedua, dan diperoleh

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{\partial L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\partial^2 L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o(.) \\ L(\boldsymbol{\theta}) &\approx L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\partial^2 L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}), \end{aligned} \quad (4.51)$$

karena  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  adalah penaksir ML dari  $\boldsymbol{\theta}$  sehingga  $\frac{\partial L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ , dengan  $\frac{\partial L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$  adalah vektor gradien yang dievaluasi pada  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Diketahui bahwa

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})] = -E \left[ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right],$$

maka persamaan (4.51) dapat ditulis dalam bentuk

$$2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\boldsymbol{\theta})) \approx (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}). \quad (4.52)$$

Bukti (b) :

Diketahui  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n$  adalah vektor penaksir ML parameter model RWM (4.10) yang berdimensi  $b^* = m(p+2)+1$ . Berdasarkan Lemma 4.6, bahwa matriks informasi Fisher  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]$  adalah *positive definite*, sehingga bentuk kuadrat  $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$  dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) &= (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T ([\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2}) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \\ &= \left[ [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \right]^T \left[ [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \right] \\ &= \mathbf{z}^T \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

dengan

$$\mathbf{z} = [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{b^*}), n \rightarrow \infty.$$

Berdasarkan Teorema 2.7, bentuk kuadrat (4.53) berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat bebas  $b^* = m(p+2)+1$ , yakni

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \sim \chi_{m(p+2)+1}^2, n \rightarrow \infty. \blacksquare$$

Tahapan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak adalah

- (1) Menentukan hipotesis

Rumusan hipotesis pengujian parameter regresi model RWM secara serentak adalah

$$H_0 : \beta_{1h} = \beta_{2h} = \dots = \beta_{mh} = 0, h = 1, 2, \dots, p$$

$$H_1 : \text{Paling sedikit terdapat satu } \beta_{kh} \neq 0, k = 1, 2, \dots, m; h = 1, 2, \dots, p. \quad (4.54)$$

- (2) Mendefinisikan himpunan parameter di bawah  $H_0$ .

Himpunan parameter di bawah  $H_0$  adalah

$$\Omega_0 = \{\mathbf{0}_{(mp \times 1)}^T, \boldsymbol{\theta}_2^T\}, \text{ dengan } \mathbf{0}_{(mp \times 1)} \text{ adalah vektor nol berdimensi } mp, \text{ dimana}$$

$$\boldsymbol{\theta}_2 = [a \ \boldsymbol{\gamma}^T \ \boldsymbol{\beta}_0^T]^T \text{ adalah vektor berdimensi } (1+2m), \ \boldsymbol{\beta}_0 = [\beta_{10} \ \beta_{20} \ \dots \ \beta_{m0}]^T$$

dan  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_m]^T$  masing-masing vektor berdimensi  $m$ . Himpunan parameter di bawah  $H_0$  dapat dinyatakan dalam vektor, yaitu

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [\mathbf{0}_{(mp \times 1)}^T \ \boldsymbol{\theta}_2^T]^T$$

- (3) Mendefinisikan fungsi *likelihood* di bawah  $H_0$

Fungsi *likelihood* di bawah  $H_0$  adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega_0) &= \prod_{i=1}^n f(y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{mi} \mid a, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}_0) \\ &= \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} (y_{ki})^{\frac{\gamma_k}{a}-1} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \beta_{k0}\right] \right) \right) \left( \prod_{i=1}^n A_{0i}^{a-m} \right) \times \\ &\quad \left( \prod_{i=1}^n \exp(-A_{0i}^a) \right) \left( \prod_{i=1}^n \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_{0i}^{(\ell-1)a} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

dengan

$$A_{0i} = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\frac{\gamma_k}{a}} \exp[-\frac{\gamma_k}{a} \beta_{k0}].$$

- (4) Mendefinisikan fungsi *log-likelihood* di bawah  $H_0$ , yaitu

$$L(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \ln \mathcal{L}(\Omega_0 | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}), \quad (4.56)$$

dengan

$$L_1(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \{ \ln \gamma_k - \ln a + (\frac{\gamma_k}{a} - 1) \ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{a} \beta_{k0} \}$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (a_0 - m) \ln A_i; \quad L_3(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = - \sum_{i=1}^n A_{0i}^a;$$

$$L_4(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \ln Q_i,$$

dengan

$$Q_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_{0i}^{(\ell-1)a} \quad \text{dan} \quad A_{0i} = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\gamma_k/a} \exp[-\frac{\gamma_k}{a} \beta_{k0}].$$

- (5) Menentukan maksimum fungsi *likelihood* dan *log-likelihood* di bawah  $H_0$ , yaitu masing-masing adalah

$$\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0) = \max_{\Omega_0} \mathcal{L}(\Omega_0) = \mathcal{L}(\hat{a}_0, \hat{\gamma}_0, \hat{\beta}_{00}) = \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \quad \text{dan}$$

$$L(\hat{\Omega}_0) = \ln \mathcal{L}(\hat{\Omega}_0) = L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0), \quad \text{dengan} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = [\hat{a}_0 \quad \hat{\gamma}_0^T \quad \hat{\beta}_{00}^T]^T,$$

$$\text{dimana} \quad \hat{\gamma}_0 = [\hat{\gamma}_{01} \quad \hat{\gamma}_{02} \quad \cdots \quad \hat{\gamma}_{0m}]^T \quad \text{dan} \quad \hat{\beta}_{00} = [\hat{\beta}_{010} \quad \hat{\beta}_{020} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{0m0}]^T$$

- (6) Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi, yaitu

$$\Omega_{rw} = \{\boldsymbol{\beta}_{(mp \times 1)}^*, \boldsymbol{\theta}_2^T\}, \quad \text{dengan}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{(mp \times 1)}^* = [\boldsymbol{\beta}_1^{*T} \quad \boldsymbol{\beta}_2^{*T} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_m^{*T}]^T, \quad \boldsymbol{\beta}_k^* = [\beta_{k1} \quad \beta_{k2} \quad \cdots \quad \beta_{kp}]^T, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad \text{dan}$$

$$\boldsymbol{\theta}_2 = [a \quad \gamma^T \quad \beta_0^T]^T. \quad \text{Himpunan parameter di bawah populasi dinyatakan dalam}$$

$$\text{adalah} \quad \boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\beta}^{*T} \quad \boldsymbol{\theta}_2^T]^T.$$

- (7) Mendefinisikan fungsi *likelihood* di bawah populasi.

Fungsi *likelihood* di bawah populasi diberikan oleh persamaan (4.14)

- (8) Mendefinisikan fungsi *log-likelihood* di bawah populasi

Fungsi *log-likelihood* di bawah populasi diberikan oleh persamaan (4.15)

- (9) Menentukan maksimum fungsi *likelihood* dan *log-likelihood* di bawah populasi, yaitu masing-masing adalah

$$\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw}) = \max_{\Omega_{rw}} \mathcal{L}(a, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = \mathcal{L}(\hat{a}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) \text{ dan}$$

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = L(\hat{\Omega}_{rw}) = \ln \mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw}), \text{ dimana}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{a} \ \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T \ \hat{\boldsymbol{\beta}}^T]^T \text{ adalah penaksir ML parameter model RWM.}$$

- (10) Tahapan selanjutnya dari pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak adalah penentuan statistik uji, penentuan distribusi statistik uji dan penentuan daerah penolakan, yang dituangkan dalam Teorema 4.3 berikut ini.

#### **Teorema 4.3**

Jika  $\boldsymbol{\theta}$  adalah parameter model RWM (4.10), dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  adalah penaksir ML parameter  $\boldsymbol{\theta}$ , serta suatu hipotesis yang diberikan oleh persamaan (4.54), maka

- (a) Statistik uji pada pengujian hipotesis nol pada persamaan (4.54) adalah

$$G_n = 2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)), \text{ dengan } \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 \text{ adalah penaksir ML parameter di bawah } H_0$$

dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  adalah penaksir ML parameter di bawah populasi.

- (b) Distribusi statistik uji  $G_n$  adalah Khi-kuadrat dengan derajat bebas  $mp$ , yakni

$$G_n = 2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)) \xrightarrow{d} \chi_{mp}^2, n \rightarrow \infty.$$

- (c) Daerah penolakan hipotesis nol yang disajikan pada persamaan (4.54) pada taraf uji  $\alpha$  adalah

$$G_n > \chi_{(\alpha, mp)}^2.$$

Bukti (a) :

Rumusan hipotesis yang diberikan oleh persamaan (4.54) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$H_0 : \boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{0}_{(mp \times 1)}$$

$$H_1 : \boldsymbol{\beta}^* \neq \mathbf{0}_{(mp \times 1)},$$

dengan  $\boldsymbol{\beta}^* = [\boldsymbol{\beta}_1^{*T} \ \boldsymbol{\beta}_2^{*T} \ \cdots \ \boldsymbol{\beta}_m^{*T}]^T$ , dimana  $\boldsymbol{\beta}_k^* = [\beta_{k1} \ \beta_{k2} \ \cdots \ \beta_{kp}]$ ,

$k = 1, 2, \dots, m$ . Diketahui  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$  dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  masing-masing adalah penaksir ML yang memaksimumkan fungsi *likelihood* dan *log-likelihood* di bawah  $H_0$  dan di bawah



populasi. Berdasarkan definisi 2.8, statistik uji LR pengujian hipotesis nol yang diberikan oleh persamaan (4.54) adalah

$$\tau(\mathbf{y}) = \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})}. \quad (4.57)$$

Berdasarkan persamaan (4.14) dan (4.55), statistik LR yang diberikan oleh persamaan (4.57) dapat dinyatakan menjadi

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{y}) = \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})} = & \frac{\left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \frac{\hat{\gamma}_{0k}}{\hat{a}_0} (y_{ki})^{(\hat{\gamma}_{0k}/\hat{a}_0)-1} \exp\left[-\frac{\hat{\gamma}_{0k}}{\hat{a}_0} \hat{\beta}_{k0}\right] \right) \right) \left( \prod_{i=1}^n \hat{A}_i^{\hat{a}_0-m} \right)}{\left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{a}} (y_{ki})^{(\hat{\gamma}_k/\hat{a})-1} \exp\left[-\frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{a}} \hat{\beta}_k^T \mathbf{x}_i\right] \right) \right) \left( \prod_{i=1}^n \hat{A}_i^{\hat{a}-m} \right)} \times \\ & \frac{\left( \prod_{i=1}^n \exp(-\hat{A}_{0i}^{\hat{a}_0}) \right) \left( \prod_{i=1}^n \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, \hat{a}_0) \hat{A}_{0i}^{(\ell-1)\hat{a}_0} \right] \right)}{\left( \prod_{i=1}^n \exp(-\hat{A}_i^{\hat{a}}) \right) \left( \prod_{i=1}^n \left[ \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, \hat{a}) \hat{A}_i^{(\ell-1)\hat{a}} \right] \right)}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

dengan

$$\hat{A}_{0i} = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\hat{\gamma}_{0k}/\hat{a}_0} \exp\left[-\frac{\hat{\gamma}_{0k}}{\hat{a}_0} \hat{\beta}_{k0}\right]$$

dan

$$\hat{A}_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\hat{\gamma}_k/\hat{a}} \exp\left[-\frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{a}} \hat{\beta}_k^T \mathbf{x}_i\right].$$

Berdasarkan persamaan (4.58), pecahan  $\frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})}$  tidak dapat disederhanakan,

sehingga untuk memudahkan penghitungan, statistik LR yang diberikan oleh persamaan (4.57) dinyatakan dalam bentuk yang ekuivalen menjadi

$$\tau^{-2}(\mathbf{y}) = \left[ \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})} \right]^{-2} = \left[ \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})}{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)} \right]^2. \quad (4.59)$$

Penerapan logaritma natural pada persamaan (4.59) didapat

$$\begin{aligned} G_n = -2 \ln(\tau(\mathbf{y})) &= -2 \ln \left[ \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})} \right] = 2 \ln \left[ \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw})}{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)} \right] \\ &= 2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)), \end{aligned} \quad (4.60)$$

dengan

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \ln \mathcal{L}(\hat{\Omega}_{rw}) \text{ dan } L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = \ln \mathcal{L}(\hat{\Omega}_0).$$

Bukti (b) :

Berdasarkan Teorema 4.2, bahwa statistik  $G_n$  yang diberikan oleh persamaan (4.60) ekuivalen dengan bentuk kuadrat

$$G_n = 2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)) \\ \approx (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0)^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0),$$

dan akan dibuktikan bahwa di bawah  $H_0$ , bentuk kuadrat

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0)^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \xrightarrow{d} \chi_{mp}^2, n \rightarrow \infty.$$

Penaksir ML pada populasi hipotesis yang disajikan pada persamaan (4.54) dipartisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*T} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^T]^T \quad (4.61)$$

dengan

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^{*T} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^{*T} \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_m^{*T}]^T, \text{ dimana } \hat{\boldsymbol{\beta}}_k^* = [\hat{\beta}_{k1} \quad \hat{\beta}_{k2} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{kp}]^T, k = 1, 2, \dots, m \text{ dan} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = [\hat{a} \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_0^T]^T, \quad (4.62)$$

$$\text{dimana } \hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{\gamma}_1 \quad \hat{\gamma}_2 \quad \cdots \quad \hat{\gamma}_m]^T; \hat{\boldsymbol{\beta}}_0 = [\hat{\beta}_{10} \quad \hat{\beta}_{20} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{m0}]^T.$$

Penaksir ML pada  $H_0$  dipartisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = [\mathbf{0}_{(mp \times 1)}^T \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{02}^T]^T, \quad (4.63)$$

dengan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{02} = [\hat{a}_0 \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}}_0^T \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{00}^T]^T, \text{ dimana} \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_0 = [\hat{\gamma}_{01} \quad \hat{\gamma}_{02} \quad \cdots \quad \hat{\gamma}_{0m}]^T \text{ dan } \hat{\boldsymbol{\beta}}_{00} = [\hat{\beta}_{010} \quad \hat{\beta}_{020} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{0m0}]^T$$

Parameter yang sebenarnya (yang diketahui) pada  $H_0$  dipartisi menjadi

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [\mathbf{0}_{(mp \times 1)}^T \quad \boldsymbol{\theta}_2^T]^T.$$

Berdasarkan Teorema 4.1 bahwa  $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}), n \rightarrow \infty$  dan memperhatikan persamaan (4.61), maka

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta}^* \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathbf{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(mp \times 1)} \\ \mathbf{0}_{((2m+1) \times 1)} \end{bmatrix}, [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} \right), n \rightarrow \infty. \quad (4.64)$$

Matriks informasi Fisher dan inversnya pada persamaan (4.64) masing-masing dapat dinyatakan dalam matriks partisi, yaitu

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}^{11}]_{(mp \times mp)} & [\mathbf{I}^{12}]_{(mp \times (2m+1))} \\ [\mathbf{I}^{21}]_{((2m+1) \times mp)} & [\mathbf{I}^{22}]_{((2m+1) \times (2m+1))} \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{11}] & [\mathbf{I}_{12}] \\ [\mathbf{I}_{21}] & [\mathbf{I}_{22}] \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

Invers matriks informasi Fisher (4.65) dapat dinyatakan menjadi

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{11.2}^{-1}] & -[\mathbf{I}_{11.2}^{-1}][\mathbf{I}_{12}][\mathbf{I}_{22}^{-1}] \\ -[\mathbf{I}_{22}^{-1}][\mathbf{I}_{21}][\mathbf{I}_{11.2}^{-1}] & [\mathbf{I}_{22.1}^{-1}] \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

dengan

$$[\mathbf{I}_{11.2}] = [\mathbf{I}_{11}] - [\mathbf{I}_{12}][\mathbf{I}_{22}^{-1}][\mathbf{I}_{21}] \text{ dan } [\mathbf{I}^{11}]^{-1} = [\mathbf{I}_{11.2}], \quad (4.67)$$

dimana  $[\mathbf{I}_{11}]$ ,  $[\mathbf{I}_{22}]$ ,  $[\mathbf{I}_{11.2}]$  dan  $[\mathbf{I}_{22.1}]$  adalah matriks-matriks non singular (Gupta dan Nagar, 2000). Berdasarkan persamaan (4.65), (4.66) dan (4.67) diperoleh hubungan

$$[\mathbf{I}^{21}][\mathbf{I}^{11}]^{-1} = -[\mathbf{I}_{22}^{-1}][\mathbf{I}_{21}]. \quad (4.68)$$

Berdasarkan teori distribusi normal multivariat bahwa, jika  $\mathbf{y}$  dan  $\mathbf{x}$  berdistribusi bersama normal multivariat dengan matriks varian-kovarian  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yx}} \neq \mathbf{0}$ , maka distribusi bersyarat dari  $\mathbf{y}$  jika diberikan  $\mathbf{x}$  adalah normal multivariat, yakni  $\mathbf{y} | \mathbf{x} \sim \mathbf{N}(E(\mathbf{y} | \mathbf{x}), \text{cov}(\mathbf{y} | \mathbf{x}))$ , dengan

$$E(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yx}} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)$$

$$\text{cov}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yx}} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x). \quad (4.69)$$

Berdasarkan persamaan (4.69), jika diberikan  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$  dan  $\boldsymbol{\mu}_x$ , maka penaksir ML dari  $\boldsymbol{\mu}_y$  adalah

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_y = \mathbf{y} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yx}} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) \quad (4.70)$$

(Rencher, 2000; Pawitan, 2001).

Berdasarkan sifat distribusi bersyarat yang disajikan pada persamaan (4.69) dan memperhatikan persamaan (4.70), dengan cara serupa penaksir ML  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{02}$  dapat dinyatakan dalam komponen vektor  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  jika diberikan  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \mathbf{0}_{mp \times 1}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$  dan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$ , yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{02} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - [\mathbf{I}^{21}][\mathbf{I}^{11}]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \mathbf{0}_{mp \times 1}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - [\mathbf{I}^{21}][\mathbf{I}^{11}]^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}^*,$$

dan berdasarkan hubungan (4.68) didapat

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{02} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 + [\mathbf{I}_{22}]^{-1}[\mathbf{I}_{21}]\hat{\boldsymbol{\beta}}^*. \quad (4.71)$$

Berdasarkan persamaan (4.52) dalam Teorema 4.2, bahwa

$$2[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\boldsymbol{\theta})] \approx (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})](\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}),$$

sehingga berdasarkan hipotesis nol  $H_0 : \boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{0}_{mp \times 1}$ , persamaan (4.60) dapat dinyatakan menjadi

$$\begin{aligned} 2[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)] &= 2[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\boldsymbol{\theta}_0)] - 2[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) - L(\boldsymbol{\theta}_0)] \\ &\approx (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0)^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})](\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) - (\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \boldsymbol{\theta}_0)^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})](\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \boldsymbol{\theta}_0). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Berdasarkan persamaan (4.71) dan memperhatikan persamaan (4.65) didapat

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \boldsymbol{\theta}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(mp \times 1)} - \mathbf{0}_{(mp \times 1)} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{02} - \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(mp \times 1)} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_2 + [\mathbf{I}_{22}]^{-1}[\mathbf{I}_{21}]\hat{\boldsymbol{\beta}}^* \end{bmatrix},$$

dan

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \boldsymbol{\theta}_0)^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})](\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \boldsymbol{\theta}_0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(mp \times 1)} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{02} - \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{11}] & [\mathbf{I}_{12}] \\ [\mathbf{I}_{21}] & [\mathbf{I}_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(mp \times 1)} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{02} - \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{02} - \boldsymbol{\theta}_2)^T [\mathbf{I}_{22}](\hat{\boldsymbol{\theta}}_{02} - \boldsymbol{\theta}_2) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_2 + [\mathbf{I}_{22}]^{-1}[\mathbf{I}_{21}]\hat{\boldsymbol{\beta}}^*)^T [\mathbf{I}_{22}](\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_2 + [\mathbf{I}_{22}]^{-1}[\mathbf{I}_{21}]\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}^* \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{12}][\mathbf{I}_{22}]^{-1}\mathbf{I}_{21} & [\mathbf{I}_{12}] \\ [\mathbf{I}_{21}] & [\mathbf{I}_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}^* \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Persamaan (4.72) dapat disederhanakan dengan menguraikan bentuk kuadrat  $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0)^T [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})](\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0)$  dan bentuk kuadrat (4.73), sehingga didapat

$$2[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)] \approx \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*T} ([\mathbf{I}_{11}] - [\mathbf{I}_{12}][\mathbf{I}_{22}]^{-1}[\mathbf{I}_{21}])\hat{\boldsymbol{\beta}}^*. \quad (4.74)$$

Berdasarkan persamaan (4.67), persamaan (4.74) dapat disederhanakan menjadi

$$2[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)] \approx \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*T} [\mathbf{I}^{11}]^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}^*. \quad (4.75)$$

Berdasarkan persamaan (4.64) dan (4.65) serta memperhatikan  $H_0 : \boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{0}_{(mp \times 1)}$ , maka dari persamaan (4.75) didapat

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, [\mathbf{I}^{11}]_{(mp \times mp)}), n \rightarrow \infty,$$

dan memperhatikan Lemma 4.6 didapat

$$[\mathbf{I}^{11}]^{-1/2} \hat{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{mp}). \quad (4.76)$$

Berdasarkan persamaan (4.76), bentuk kuadrat yang diberikan oleh persamaan (4.75) berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat bebas  $mp$ , yakni

$$\begin{aligned} 2[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)] &\approx [\mathbf{I}^{11}]^{-1/2} \hat{\boldsymbol{\beta}}^*]^T [\mathbf{I}^{11}]^{-1/2} \hat{\boldsymbol{\beta}}^*] \\ &= \mathbf{z}^T \mathbf{z} \xrightarrow{d} \chi_{mp}^2, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

dengan

$$\mathbf{z} = [\mathbf{I}^{11}]^{-1/2} \hat{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{mp}), n \rightarrow \infty,$$

dan  $mp$  adalah dimensi vektor  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ , atau selisih antara banyaknya parameter di bawah  $H_0$  dan banyaknya parameter di bawah populasi.

Bukti (c) :

Penentuan daerah penolakan atau daerah kritis pengujian hipotesis nol yang diberikan oleh persamaan (4.54) didasarkan pada uji LR. Berdasarkan definisi 2.8, bahwa uji LR menolak  $H_0$  jika  $\tau(\mathbf{y}) = \frac{\mathcal{L}(\hat{\Omega}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\Omega})} < c$  untuk  $0 < c \leq 1$ .

Misalkan diberikan taraf uji  $\alpha$  dengan  $0 < \alpha < 1$  maka dapat ditentukan suatu konstanta  $0 < c_\alpha \leq 1$  yang nilainya bergantung pada harga taraf uji  $\alpha$  dan memenuhi  $P_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0}(\tau(\mathbf{y}) < c_\alpha) = \alpha$ . Berdasarkan definisi taraf uji  $\alpha$  diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0}(\ln \tau(\mathbf{y}) < \ln c_\alpha) \\ &= P(-2 \ln \tau(\mathbf{y}) > -2 \ln c_\alpha) \\ &= P(2[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)] > c_1) \\ &= P(G_n > c_1), \end{aligned} \tag{4.77}$$

dengan  $G_n \sim \chi_{mp}^2$ . Berdasarkan persamaan (4.77) nilai  $c_1$  adalah  $\chi_{(\alpha, mp)}^2$ , yaitu

penyelesaian persamaan  $\int_{c_1}^{\infty} f(w) dw = \alpha$  dengan

$$f(w) = \frac{w^{(mp/2)-1} \exp[-w/2]}{2^{mp/2} \Gamma(mp/2)}$$

adalah FKP distribusi Khi-kuadrat dengan derajat bebas  $mp$ . Berdasarkan persamaan (4.77), pengujian hipotesis yang disajikan pada persamaan (4.54) menolak  $H_0$  pada taraj uji  $\alpha$ , jika

$$G_n > \chi_{(\alpha, mp)}^2. \blacksquare$$

#### 4.6. Algoritma Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM

Pada sub-bab ini dikemukakan algoritma pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak dan parsial. Algoritma pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak adalah sebagai berikut

1. Menetapkan hipotesis
2. Mendefinisikan himpunan parameter di bawah  $H_0$ , yaitu  $\Omega_0$  atau  $\theta_0$ .
3. Menginput data pengamatan respon  $(y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{mi})$  dan data pengamatan kovariat  $(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi})$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .
4. Mendefinisikan fungsi *likelihood* dan *log-likelihood*, yaitu masing-masing adalah  $\mathcal{L}(\theta_0 | \mathbf{y})$  dan  $L(\theta_0 | \mathbf{y}) = \ln \mathcal{L}(\theta_0 | \mathbf{y})$ .
5. Menentukan penaksir ML parameter model RWM di bawah  $H_0$ , yaitu  $\hat{\theta}_0$  dengan tahapan seperti tahap 3 sampai dengan tahap 11 algoritma penaksiran parameter model RWM.
6. Menentukan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\hat{\theta}_0)$ , dan invers matriks informasi Fisher, yaitu  $[\mathbf{I}(\hat{\theta}_0)]^{-1} = [-\mathbf{H}(\hat{\theta}_0)]^{-1}$
7. Menghitung nilai *log-likelihood* model RWM di bawah  $H_0$ , yaitu  $L(\hat{\theta}_0)$
8. Mendefinisikan himpunan parameter di bawah populasi, yaitu  $\Omega_{rw}$  atau  $\theta$ .
9. Mendefinisikan fungsi *likelihood*  $\mathcal{L}(\theta | \mathbf{y})$  dan fungsi *log-likelihood*  $L(\theta | \mathbf{y}) = \ln \mathcal{L}(\theta | \mathbf{y})$  model RWM di bawah populasi
10. Menentukan penaksir ML parameter model RWM di bawah populasi, yaitu  $\hat{\theta}$  dengan tahapan seperti tahap 3 sampai dengan tahap 11 algoritma penaksiran parameter model RWM.
11. Menentukan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\hat{\theta})$ , dan invers matriks informasi Fisher, yaitu  $[\mathbf{I}(\hat{\theta})]^{-1} = [-\mathbf{H}(\hat{\theta})]^{-1}$
12. Menentukan nilai *log-likelihood* untuk model RWM di bawah populasi, yaitu  $L(\hat{\theta})$
13. Menentukan nilai statistik uji  $G_n = 2(L(\hat{\theta}) - (L(\hat{\theta}_0)))$
14. Menentukan taraf uji  $\alpha$  dan nilai kritis  $\chi^2_{(\alpha, mp)}$

15. Menentukan daerah penolakan, yaitu menolak  $H_0$ , jika  $G_n > \chi^2_{(\alpha, mp)}$  atau gagal menolak  $H_0$ , jika  $G_n \leq \chi^2_{(\alpha, mp)}$ .
16. Selesai

(Halaman ini sengaja dikosongkan)



## BAB 5

### PENAKSIRAN PARAMETER MODEL GWMWR

Bab ini membahas penaksiran parameter model *geographically weighted multivariate Weibull regression* (GWMWR). Bahasan pada awal bab ini adalah model umum GWMWR dan kemudian dilanjutkan pembahasan penaksiran parameter dengan metode MLE. Bahasan pada akhir bab ini adalah algoritma penaksiran parameter model GWMWR.

#### 5.1. Model GWMWR

Model GWMWR adalah model RWM dengan semua parameter bergantung pada lokasi geografis. Penaksiran parameter model GWMWR didasarkan metode GWR, yaitu penaksiran parameter dilakukan secara lokal pada setiap lokasi pengamatan dan dengan pembobotan spasial atau pembobotan faktor lokasi geografis. Misalkan semua koordinat lokasi pengamatan diketahui, dimana  $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$  menyatakan koordinat lokasi (titik) pengamatan ke- $i$  dengan  $u_{1i}$  menyatakan letak lintang dan  $u_{2i}$  menyatakan letak bujur untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Berdasarkan model RWM yang diberikan oleh persamaan (4.10) dapat dikembangkan menjadi model lokal yang dinamakan model GWMWR, dengan semua parameter bergantung pada lokasi geografis dan semua parameter diasumsikan sebagai fungsi dari lokasi pengamatan. Misalkan semua parameter model RWM (4.10) bergantung pada lokasi geografis, maka model GWMWR pada lokasi ke  $i$  yang mempunyai koordinat  $\mathbf{u}_i$  adalah

$$f(y_{1i}, \dots, y_{mi}) = \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} (y_{ki})^{\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} - 1} \exp \left[ -\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i \right] \right) \times \mathcal{A}_i^{a(\mathbf{u}_i) - m} Q_i \exp[-\mathcal{A}_i^{a(\mathbf{u}_i)}], \quad (5.1)$$

dengan

$$\mathcal{A}_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)}} \exp \left[ -\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i \right], \quad Q_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a(\mathbf{u}_i)) \mathcal{A}_i^{(\ell-1)a(\mathbf{u}_i)}$$

dan

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 & X_{1i} & X_{2i} & \cdots & X_{pi} \end{bmatrix}^T.$$

Model GWMWR pada lokasi  $i$  yang diberikan oleh persamaan (5.1) mempunyai  $1 + m + m(p+1)$  parameter, yaitu sebuah parameter ukuran derajat *dependence*,  $m$  parameter bentuk dan  $m(p+1)$  parameter regresi. Parameter model GWMWR pada lokasi ke- $i$  dapat dinyatakan dalam bentuk vektor, yaitu

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) = \begin{bmatrix} a(\mathbf{u}_i) & \boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{u}_i) & \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) \end{bmatrix}^T, \quad (5.2)$$

dimana

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_i) = [\gamma_1(\mathbf{u}_i) \quad \gamma_2(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \gamma_m(\mathbf{u}_i)]^T; \quad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = [\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_m(\mathbf{u}_i)]^T,$$

dengan

$$\boldsymbol{\beta}_k(\mathbf{u}_i) = [\beta_{k0}(\mathbf{u}_i) \quad \beta_{k1}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \beta_{kp}(\mathbf{u}_i)]^T \text{ untuk } k=1,2,\dots,m.$$

Berdasarkan model GWMWR yang diberikan oleh persamaan (5.1), tahapan analisis selanjutnya adalah penaksiran parameter yang pembahasannya disajikan pada sub-bab berikut.

## 5.2. Penaksiran Parameter Model GWMWR

Penaksiran parameter model GWMWR pada penelitian ini menggunakan metode MLE. Tahap awal metode MLE adalah pendefinisian fungsi *likelihood*. Misalkan diberikan sampel acak  $(Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{mj})$  untuk  $j=1,2,\dots,n$  dari populasi distribusi Weibull multivariat dengan FKP bersama diberikan pada persamaan (4.1), dan  $(X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{pj})$  untuk  $j=1,2,\dots,n$  adalah pengamatan untuk peubah bebas atau kovariat. Berdasarkan metode GWR, penaksiran parameter model GWMWR dilakukan secara lokal pada setiap lokasi pengamatan dan penaksiran parameter menggunakan pembobot spasial. Pembobotan spasial ini untuk memberikan pengaruh yang berbeda pada setiap pengamatan yang berbeda pada penaksiran parameter. Pengamatan yang lebih dekat dengan lokasi  $\mathbf{u}_i$  akan mempunyai pengaruh yang lebih besar dari pada pengamatan-pengamatan yang lebih jauh dari lokasi  $\mathbf{u}_i$ , sehingga bobot spasial yang lebih besar akan diberikan kepada pengamatan-pengamatan yang lebih dekat dengan lokasi  $\mathbf{u}_i$  dari pada pengamatan-pengamatan yang lebih jauh.

Misalkan semua koordinat lokasi pengamatan diketahui, dan bobot spasial

yang diberikan kepada pengamatan di lokasi  $\mathbf{u}_j$  untuk model GWMWR pada lokasi  $\mathbf{u}_i$  adalah  $w_{ij}$ . Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (5.1), maka fungsi *likelihood* model GWMWR pada lokasi  $i$  dengan koordinat  $\mathbf{u}_i$  didefinisikan oleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | \mathbf{y}) &= \prod_{j=1}^n (f(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | \mathbf{y}_j)) \\ &= \left( \prod_{j=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} (y_{kj})^{\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} - 1} \exp \left[ -\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j \right] \right) \right) \times \\ &\quad \left( \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j^{a(\mathbf{u}_i) - m} \right) \left( \prod_{j=1}^n \exp[-\mathcal{A}_j^{a(\mathbf{u}_i)}] \right) \left( \prod_{j=1}^n \mathcal{Q}_j \right),\end{aligned}\quad (5.3)$$

dengan  $\mathcal{A}_j$  dan  $\mathcal{Q}_j$  diberikan oleh persamaan (5.1).

Penaksir *maximum likelihood* (ML) parameter model GWMWR pada lokasi ke- $i$  diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* dengan pembobotan spasial atau equivalen dengan memaksimumkan fungsi *log-likelihood* dengan pembobotan spasial, karena maksimum dari kedua fungsi tersebut dicapai pada titik yang sama, yaitu di titik  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)$  yang dinamakan penaksir ML parameter model GWMWR. Berdasarkan persamaan (5.3), fungsi *likelihood* dengan pembobotan spasial didefinisikan oleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | \mathbf{y}, w_{ij}) &= \prod_{j=1}^n (f(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | \mathbf{y}_j))^{w_{ij}} \\ &= \left( \prod_{j=1}^n \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} (y_{kj})^{\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} - 1} \exp \left[ -\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j \right] \right) \right)^{w_{ij}} \times \\ &\quad \left( \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j^{a(\mathbf{u}_i) - m})^{w_{ij}} \right) \left( \prod_{j=1}^n (\exp[-\mathcal{A}_j^{a(\mathbf{u}_i)}])^{w_{ij}} \right) \left( \prod_{j=1}^n \mathcal{Q}_j^{w_{ij}} \right).\end{aligned}\quad (5.4)$$

Fungsi *log-likelihood* berdasarkan fungsi *likelihood* (5.3) adalah

$$L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | \mathbf{y}_j; \mathbf{x}_j), \quad (5.5)$$

dan fungsi *log-likelihood* berdasarkan fungsi *likelihood* dengan pembobotan spasial yang diberikan oleh persamaan (5.4) didefinisikan oleh

$$L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) = \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | \mathbf{y}_j, w_{ij}). \quad (5.6)$$

Berdasarkan Lemma 4.1, fungsi *log-likelihood* (5.6) dapat dinyatakan

$$L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) = \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}), \quad (5.7)$$

dengan

$$L_1(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) = \sum_{j=1}^n w_{ij} \sum_{k=1}^m \left( \ln \gamma_k(\mathbf{u}_i) - \ln a(\mathbf{u}_i) + \left( \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} - 1 \right) \ln y_{kj} - \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j \right), \quad (5.8)$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) = \sum_{j=1}^n w_{ij} (a(\mathbf{u}_i) - m) \ln \mathcal{A}_j, \quad (5.9)$$

$$L_3(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) = - \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathcal{A}_j^{a(\mathbf{u}_i)}, \quad (5.10)$$

$$L_4(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij}) = \sum_{j=1}^n w_{ij} \ln \mathcal{Q}_j, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{A}_j = \sum_{k=1}^m (y_{kj})^{\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)}} \exp \left[ - \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_j \right]$$

dan

$$\mathcal{Q}_j = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a(\mathbf{u}_i)) \mathcal{A}_j^{(\ell-1)a(\mathbf{u}_i)}.$$

Penaksir ML ( $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)$ ) yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood* (5.7) diperoleh dengan menentukan solusi persamaan *likelihood* yang diberikan oleh persamaan (5.12) berikut

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)} = \mathbf{0}, \quad (5.12)$$

dengan  $\mathbf{0}$  adalah vektor nol. Vektor  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)}$  pada ruas kiri

persamaan (5.12) dinamakan vektor gradien pada lokasi  $\mathbf{u}_i$ , yaitu vektor turunan parsial orde pertama dari fungsi *log-likelihood* yang diberikan oleh persamaan (5.7) terhadap semua komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)$ . Vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$  dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \left[ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial a(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T, \quad (5.13)$$

dengan

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_i)} = \left[ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \gamma_1(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \gamma_2(\mathbf{u}_i)} \quad \dots \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \gamma_m(\mathbf{u}_i)} \right]^T,$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)} = \left[ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} \quad \dots \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\beta}_m^T(\mathbf{u}_i)} \right]^T,$$

dimana

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\beta}_k(\mathbf{u}_i)} = \left[ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \beta_{k0}(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \beta_{k1}(\mathbf{u}_i)} \quad \dots \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \beta_{kp}(\mathbf{u}_i)} \right]^T,$$

untuk  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Berdasarkan bentuk persamaan persamaan (5.8) - (5.11), bahwa persamaan *likelihood* (5.12) tidak *closed form*, sehingga solusi persamaan *likelihood* (5.12) untuk mendapatkan penaksir eksak ML parameter model GWMWR pada lokasi ke- $i$  tidak dapat ditemukan secara analitikal. Penaksir ML parameter model GWMWR pada lokasi ke- $i$  dihampiri oleh akar-akar persamaan *likelihood* (5.12) yang diselesaikan secara numerik dengan metode iterasi Newton-Raphson. Penentuan penaksir ML menggunakan metode Newton-Raphson diperlukan penghitungan vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$  dan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$ .

Berdasarkan bentuk fungsi *log-likelihood* yang diberikan oleh persamaan (5.7), penghitungan vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$  dan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$  secara langsung tidak sederhana, sehingga berdasarkan Lemma 4.1 - 45, penghitungan  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$  dan  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$  dipecah menjadi empat bagian sedemikian sehingga memenuhi

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{q=1}^4 \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{q=1}^4 \mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) \quad (5.14)$$

dan

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{q=1}^4 \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{q=1}^4 \mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)), \quad (5.15)$$

dengan  $L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})$  untuk  $q = 1, 2, 3, 4$  diberikan pada persamaan (5.8) sampai dengan (5.11).

Vektor  $\mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$  untuk  $q = 1, 2, 3, 4$  mempunyai argumen yang sama dengan vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$ , dimana masing-masing berdimensi

$1 + m + m(p + 1)$  dan dinyatakan dalam bentuk umum

$$\mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial a(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\gamma}_k^T(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} \end{bmatrix}^T.$$

Matriks  $\mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$  untuk  $q=1,2,3,4$  juga mempunyai argumen yang sama dengan matriks  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$ , masing-masing adalah matriks simetris yang mempunyai ukuran  $(1 + m + m(p + 1)) \times (1 + m + m(p + 1))$ , dan dapat dinyatakan dalam bentuk umum

$$\mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial a^2(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial a(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial a(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_i) \partial a(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) \partial a(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Berdasarkan fungsi (5.11), komponen-komponen vektor  $\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$  dan elemen-elemen matriks  $\mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))$  masing-masing dapat diperoleh dengan formula

$$\mathbf{g}_4(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \frac{\partial L_4(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}}{Q_j} \left[ \frac{\partial Q_j}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)} \right], \quad (5.17)$$

dan

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_4(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) &= \frac{\partial^2 L_4(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | w_{ij})}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij}}{Q_j^2} \left( \left[ \frac{\partial^2 Q_j}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)} \right] Q_j - \left[ \frac{\partial Q_j}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)} \right] \left[ \frac{\partial Q_j}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)} \right]^T \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

dengan  $\left[ \frac{\partial Q_j}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)} \right] \left[ \frac{\partial Q_j}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)} \right]^T$  adalah matriks simetri yang mempunyai ukuran

$(1 + m + m(p + 1)) \times (1 + m + m(p + 1))$ . Berdasarkan vektor gradien (5.14) dan matriks Hessian (5.15), penaksiran parameter model GWMWR pada lokasi  $i$  dapat dilakukan secara iteratif dengan metode Newton-Raphson, yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(q^*+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(q^*)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(q^*)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(q^*)}), \quad q^* = 0, 1, 2, \dots \quad (5.19)$$

Berdasarkan metode GWR, bahwa model RWM adalah model khusus atau model global dari model GWMWR, dan diperoleh ketika nilai penaksir parameter

model GWMWR pada setiap lokasi pengamatan adalah sama (konstan). Penaksir parameter model RWM dapat diperoleh melalui penaksiran model GWMWR dengan metode MLE, dengan pembobot spasial  $w_{ij} = 1$  untuk setiap titik (lokasi).

Pada bagian akhir sub-bab ini diuraikan sifat-sifat asimtotik penaksir ML model GWMWR yang berguna dalam penentuan statistik uji, distribusi statistik uji dan penentuan daerah penolakan pada pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR secara parsial. Berdasarkan sifat asimtotik penaksir ML yang dituangkan pada Teorema 4.1, bahwa penaksir parameter model GWMWR pada lokasi  $i$  berdistribusi normal multivariat asimtotik, yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i), [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))]^{-1}), \quad (5.20)$$

dengan  $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))] = -E \left[ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)} \right]$  adalah matriks informasi Fisher.

Berdasarkan sifat asimtotik penaksir ML yang telah diuraikan pada sub-bab 2.5, bahwa  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)$  merupakan estimator tak bias asimtotik, yakni  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(\mathbf{u}_i)) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)$

dan variansi dari  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)$  untuk setiap lokasi  $\mathbf{u}_i$  adalah tidak homogen dan bergantung pada lokasi geografis, yaitu

$$\widehat{\text{var}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)) = [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))]^{-1}, \quad (5.21)$$

dan penaksir matriks informasi Fisher adalah

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))] = -\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)), \quad (5.22)$$

Diketahui  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)$  adalah penaksir tak bias dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i), [\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))]^{-1}), n \rightarrow \infty,$$

berdasarkan Lemma 4.6, didapat

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))]^{1/2} \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{mp}). \quad (5.23)$$

Misalkan  $\hat{\beta}_{kh}(\mathbf{u}_i)$  adalah komponen ke- $k^*$  dari vektor  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)$ , maka berdasarkan (5.23) komponen ke- $k^*$  dari vektor  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$  berdistribusi normal standar univariat, yaitu

$$\frac{\hat{\beta}_{kh}(\mathbf{u}_i) - \beta_{kh}(\mathbf{u}_i)}{SE(\hat{\beta}_{kh}(\mathbf{u}_i))} \xrightarrow{d} N(0,1), n \rightarrow \infty, \quad (5.24)$$

dengan

$$SE(\hat{\beta}_{kh}(\mathbf{u}_i)) = \sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_{kh}(\mathbf{u}_i))}, \quad (5.25)$$

dimana  $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_{kh}(\mathbf{u}_i))$  adalah elemen ke- $k^*$  dari diagonal utama matriks  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))]^{-1}$ , dengan  $k^* = (k-1)(p+1) + m + h$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $h = 0, 1, \dots, p$ , dengan  $m$  adalah banyaknya respon dan  $p$  adalah banyaknya kovariat.

### 5.3. Algoritma Penaksiran Parameter Model GWMWR

Penaksiran parameter model GWMWR dilakukan secara numerik menggunakan metode iterasi Newton-Raphson. Adapun algoritma penaksiran parameter model GWMWR dengan metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut

1. Menginput data pengamatan respon  $(y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{mi})$ , data pengamatan kovariat  $(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi})$  dan koordinat  $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Menentukan jarak *Euclidean* ( $d_{ij}$ ) setiap pasangan titik  $\mathbf{u}_i$  dan  $\mathbf{u}_j$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , dan disajikan dalam matriks  $n \times n$ .
3. Menentukan *bandwidth*  $b(\mathbf{u}_i)$  dan fungsi pembobot spasial  
Fungsi pembobot spasial dipilih satu dari tiga fungsi Gauss adaptif, *bi-square* adaptif dan *tricube* adaptif, yang memberikan nilai BIC minimum.
4. Menentukan pembobot spasial pada setiap titik, dan disajikan dalam matriks  $n \times n$ .
5. Menentukan batas toleransi ( $\varepsilon$ ) untuk menghentikan proses iterasi. Proses iterasi dihentikan jika memenuhi  $\|\boldsymbol{\theta}^{(q+1)}(\mathbf{u}_i) - \boldsymbol{\theta}^{(q)}(\mathbf{u}_i)\| < \varepsilon$ . Nilai toleransi pada proses iterasi Newton-Raphson adalah  $\varepsilon = 10^{-12}$ .
6. Menentukan nilai awal untuk iterasi Newton-Raphson :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}(\mathbf{u}_i) = [\hat{a}^{(0)}(\mathbf{u}_i) \ \hat{\gamma}_1^{(0)}(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \hat{\gamma}_m^{(0)}(\mathbf{u}_i) \ \hat{\beta}_1^{(0)}(\mathbf{u}_i) \ \hat{\beta}_2^{(0)}(\mathbf{u}_i) \ \dots \ \hat{\beta}_m^{(0)}(\mathbf{u}_i)]^T.$$

Nilai-nilai awal pada proses iterasi Newton-Raphson model GWMWR sama seperti nilai-nilai awal pada penaksiran model RWM, yaitu seperti pada tahap 3 algoritma penaksiran model RWM.

7. Menghitung komponen-komponen vektor



$\mathbf{g}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i)), \mathbf{g}_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i)), \mathbf{g}_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))$  dan  $\mathbf{g}_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))$

seperti pada Teorema 4.1, dengan menggunakan formula

$$\frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial a(\mathbf{u}_i)}, \frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma_1(\mathbf{u}_i)}, \dots, \frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma_m(\mathbf{u}_i)};$$

$$\frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_{k0}(\mathbf{u}_i)}, \frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_{k1}(\mathbf{u}_i)}, \dots, \frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_{kp}(\mathbf{u}_i)},$$

untuk  $k = 1, 2, \dots, m$  dan  $q = 1, 2, 3, 4$ , dimana

$\frac{\partial L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma_k(\mathbf{u}_i)}$  adalah nilai  $\frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma_k(\mathbf{u}_i)}$  dievaluasi pada  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i)$ , yaitu penaksir  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)$  setelah iterasi ke- $q^*$ .

8. Menentukan vektor gradien  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))$  berdasarkan hasil penghitungan tahap

$$7, \text{ yaitu } \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)).$$

9. Menghitung elemen-elemen matriks Hessian

$\mathbf{H}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i)), \mathbf{H}_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i)), \mathbf{H}_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))$  dan  $\mathbf{H}_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))$

berdasarkan Teorema 4.1, yaitu

$$\frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial a(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)}, \frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma_1(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)}, \dots, \frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma_m(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)}$$

dan

$$\frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_{k0}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)}, \frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_{k1}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)}, \dots, \frac{\partial^2 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_{kp}(\mathbf{u}_i) \partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)},$$

dengan

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) = [a(\mathbf{u}_i) \gamma_1(\mathbf{u}_i) \cdots \gamma_m(\mathbf{u}_i) \boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{u}_i)]^T \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, m \text{ dan } q = 1, 2, 3, 4.$$

10. Menentukan matriks Hessian berdasarkan hasil perhitungan tahap 9 yaitu

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{q=1}^4 \mathbf{H}_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i)).$$

11. Menjalankan proses iterasi Newton-Raphson untuk menentukan penaksir ML parameter  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)$  :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i) - [\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i))]^{-1} \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q^*)}(\mathbf{u}_i)), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

12. Mengevaluasi proses iterasi Newton-Raphson. Proses iterasi dihentikan bila dipenuhi kondisi  $\|\boldsymbol{\theta}^{(q^{*}+1)}(\mathbf{u}_i) - \boldsymbol{\theta}^{(q^{*})}(\mathbf{u}_i)\| < \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon = 10^{-12}$  dan kemudian dilanjutkan tahap 13. Jika kondisi tersebut tidak dipenuhi, proses iterasi diulang mulai tahap 7 dan seterusnya.
13. Menentukan penaksir ML  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)$
14. Menentukan nilai BIC  
 Penghitungan nilai BIC dilakukan setelah nilai penaksir parameter didapat, sampai diperoleh nilai BIC minimum. Proses penaksiran parameter diulang, dimulai pada tahap 3 jika belum diperoleh BIC minimum, dan dilanjutkan pada tahap 15 jika sudah diperoleh BIC minimum.
15. Output penaksir ML ( $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)$ )
16. Menentukan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))$  dan invers matriks informasi Fisher  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))]^{-1}$ , dengan  $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))] = -\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))$
17. Selesai.

## BAB 6

### PENERAPAN MODEL GWMWR PADA DATA INDIKATOR PENCEMARAN AIR SUNGAI DI SURABAYA

Bab ini membahas tujuan keempat penelitian disertasi, yaitu mendapatkan model GWMWR data indikator pencemaran air Sungai di Surabaya tahun 2013 dan mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap model GWMWR. Spesifikasi data sampel respon COD, DO dan konsentrasi  $\text{PO}_4$  yang diterapkan pada model RWM dan GWMWR adalah berdistribusi Weibull multivariat, saling berkorelasi dan bergantung pada lokasi geografis, sedangkan spesifikasi data kovariat adalah tidak terdapat multikolinieritas.

#### 6.1. Deskripsi Data Respon dan Data Kovariat

Data respon penelitian ini adalah data indikator pencemaran air sungai di Surabaya tahun 2013, yang terdiri dari data COD, DO dan konsentrasi  $\text{PO}_4$ . Data sampel respon adalah data hasil pengukuran (kontinu) dan diasumsikan bersifat acak. Berdasarkan penelitian sebelumnya, data sampel COD dan DO, masing-masing mengikuti distribusi Weibull univariat. Struktur data penelitian disajikan pada Lampiran 1 dan deskripsi data respon disajikan pada Tabel 6.1 atau Lampiran 2a.

Tabel 6.1 Deskripsi Data Respon

Respon	Satuan	<i>Mean</i>	Standar Deviasi	Minimum	Maksimum
COD	mg/l	35,7853	34,4197	10,0540	99,4130
DO	mg/l	4,1370	1,8458	0,8000	6,7000
$\text{PO}_4$	mg/l	0,2544	0,2467	0,0382	1,3689

Respon COD, DO dan  $\text{PO}_4$  pada Tabel 6.1 masing-masing dilambangkan dengan  $Y_1$ ,  $Y_2$  dan  $Y_3$ . Berdasarkan deskripsi data respon pada Tabel 6.1 atau Lampiran 2a, bahwa data COD mempunyai rentang dan standar deviasi yang cukup besar, sedangkan data DO dan konsentrasi  $\text{PO}_4$  masing-masing mempunyai rentang dan standar deviasi cukup kecil. Berdasarkan nilai *mean* dan standar deviasi, koefisien

variasi (KV) data COD, DO dan konsentrasi  $\text{PO}_4$  masing-masing adalah 96,18; 44,62 dan 96,99. Berdasarkan nilai KV, data COD dan konsentrasi  $\text{PO}_4$  lebih bervariasi atau lebih menyebar, sedangkan data DO relatif homogen. Berdasarkan nilai *mean* data COD pada Tabel 6.1, rata-rata kualitas air sungai di Surabaya tahun 2013 kurang baik, dimana rata-rata COD lebih besar dari ambang batas maksimum baku mutu air sungai golongan B. Batas baku mutu air sungai golongan B yang layak sebagai air baku untuk produksi air minum adalah COD maksimal 10 mg/l dan DO minimal 4 mg/l. Rata-rata DO air sungai di Surabaya yang mengalir pada satu aliran berdasarkan nilai *mean* pada Tabel 6.1, berada di atas ambang batas minimum baku mutu air sungai golongan B. Deskripsi data sampel kovariat disajikan pada Tabel 6.2 atau dapat dilihat pada Lampiran 2b.

Tabel 6.2 Deskripsi Data Kovariat

Kovariat	Satuan	<i>Mean</i>	Standar Deviasi	Minimum	Maksimum
Kecepatan aliran air	m/dt	2,1215	0,4829	1,3100	2,8600
Debit air	l/dt	321,3415	395,7092	5,6800	1087,6100
Konsentrasi deterjen	mg/l	122,4616	12,6397	91,4620	144,0000
TSS	mg/l	15,4815	21,6855	1,0000	71,0000

Kovariat-kovariat pada Tabel 6.2 masing-masing dilambangkan oleh  $X_1$  untuk kecepatan aliran air,  $X_2$  adalah debit air,  $X_3$  adalah konsentrasi deterjen dan  $X_4$  adalah TSS. Berdasarkan deskripsi data kovariat pada Tabel 6.2, data debit air, konsentrasi deterjen dan TSS mempunyai rentang dan standar deviasi cukup besar. Berdasarkan nilai *mean* dan standar deviasi, data debit air dan TSS masing-masing mempunyai nilai KV yang tinggi, yaitu berturut-turut adalah 123,14 dan 140,07, sehingga data debit air dan TSS lebih menyebar dari pada data kecepatan aliran air dan konsentrasi deterjen. Nilai KV data kecepatan aliran air dan konsentrasi deterjen masing-masing adalah 22,76 dan 10,32.

## 6.2. Pendeteksian Multikolinieritas antar Kovariat

Multikolinieritas dalam model regresi terjadi jika terdapat hubungan yang erat antar kovariat dalam model. Multikolinieritas dalam model regresi

menyebabkan variansi penaksir parameter menjadi besar, oleh karena itu sebelum penerapan data indikator pencemaran air pada model RWM dan GWMWR, dilakukan pendeteksian multikolinieritas antar kovariat. Pendeteksian multikolinieritas didasarkan pada nilai *variance inflation factor* (VIF), yang dihitung berdasarkan formula (2.49). Nilai VIF lebih besar dari 10 mengindikasikan terdapat multikolinieritas dalam model. Penghitungan VIF pada penelitian ini dilakukan terhadap semua kovariat dalam model RWM, yaitu kecepatan aliran air ( $X_1$ ), debit air ( $X_2$ ), konsentrasi deterjen ( $X_3$ ) dan TSS ( $X_4$ ). Hasil penghitungan VIF terhadap empat kovariat dalam model RWM disajikan pada Tabel 6.3 dan output penghitungan VIF disajikan pada Lampiran 2c.

Tabel 6.3 Nilai VIF Kovariat Penelitian

Kovariat	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
VIF	3,0844	3,0503	1,2323	1,0783

Berdasarkan hasil penghitungan pada Tabel 6.3, nilai VIF setiap kovariat kurang dari 10, hal ini menunjukkan tidak terdapat multikolinieritas antar kovariat.

### 6.3. Pengujian Distribusi

Tahap awal pengujian asumsi distribusi Weibull multivariat adalah penaksiran parameter distribusi Weibull trivariat untuk populasi yang dihipotesiskan berdasarkan data sampel, yaitu penaksiran parameter FKP bersama distribusi Weibull trivariat yang diberikan oleh persamaan (4.2). Penaksiran parameter FKP bersama menggunakan metode MLE, dimana penaksir ML parameter FKP distribusi populasi diperoleh secara iteratif menggunakan metode Newton-Raphson. Hasil penaksiran parameter distribusi Weibull trivariat disajikan pada Tabel 6.4.

Tabel 6.4 Penaksir Parameter FKP Distribusi Weibull Trivariat Populasi

Parameter	$a$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
Penaksir	0,7182	1,1353	2,2972	1,2486	36,0926	4,5904	0,2771

Lambang  $a$  pada Tabel 6.4 menyatakan parameter ukuran derajat *dependence* antar respon,  $\gamma_k$  dan  $\lambda_k$  untuk  $k=1,2,3$  masing-masing adalah parameter-parameter bentuk dan parameter-parameter skala.

Tahapan selanjutnya setelah penaksiran parameter distribusi populasi adalah melakukan pengujian distribusi. Pengujian distribusi data multivariat menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov (K-S) multivariat. Pengujian hipotesis dilakukan terhadap fungsi distribusi kumulatif (FDK) distribusi Weibull trivariat yang diberikan oleh persamaan (2.45), dengan parameter FKP disajikan pada Tabel 6.4. Diketahui  $F^*$  adalah FDK distribusi Weibull trivariat dengan parameter diberikan pada Tabel 6.4, dan  $F$  adalah FDK distribusi Weibull trivariat populasi dengan parameter tidak diketahui. Rumusan hipotesis untuk pengujian distribusi multivariat adalah

$H_0 : F = F^*$  ( fungsi distribusi data respon adalah  $F^*$  )

$H_1 : F \neq F^*$  (fungsi distribusi data respon adalah bukan  $F^*$  )

Statistik uji pada uji K-S multivariat adalah  $D = \max(D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(6)})$ , yang diberikan oleh persamaan (2.42), dan uji ini menolak  $H_0$  jika nilai statistik  $D > D_{(0,95)}$ . Tahapan penghitungan nilai statistik uji disajikan pada Lampiran 3b, hasil penghitungan statistik uji  $D$  dan nilai  $D_{(0,95)}$  disajikan pada Tabel 6.5.

Tabel 6.5 Nilai Statistik Uji  $D$  pada Uji K-S Trivariat

$D^{(1)}$	$D^{(2)}$	$D^{(3)}$	$D^{(4)}$	$D^{(5)}$	$D^{(6)}$	$D$	$D_{(0,95)}$
0,1670	0,2040	0,1670	0,2033	0,0979	0,2033	0,2040	0,2416

Berdasarkan hasil penghitungan pada Tabel 6.5 diperoleh nilai statistik uji  $D = \max(D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(6)}) = 0,2040$ . Berdasarkan hasil pengujian distribusi, bahwa statistik  $D$  berdistribusi normal dengan *mean* 0,17375 dan simpangan baku 0,04125, sehingga didapat persentil ke-95 dari distribusi statistik  $D$  adalah  $D_{(0,95)} = 0,2416$ . Berdasarkan hasil penghitungan diperoleh nilai  $D < D_{(0,95)} = 0,2416$ , sehingga tidak cukup bukti untuk menolak  $H_0$  dan disimpulkan data sampel respon mengikuti distribusi Weibull trivariat dengan

parameter disajikan pada Tabel 6.4. Berdasarkan nilai parameter FKP distribusi Weibull trivariat yang disajikan pada Tabel 6.4, nilai ukuran derajat *dependence*  $a$  adalah 0,7182, dan berdasarkan persamaan (2.14) dapat disimpulkan bahwa antar data respon COD, DO dan PO<sub>4</sub> saling berkorelasi. Persamaan (2.14) berubah menjadi FKP bersama distribusi Weibull multivariat dari peubah acak yang saling bebas, bila nilai ukuran derajat *dependence*  $a$  adalah 1. Matriks koefisien korelasi antar respon COD, DO dan PO<sub>4</sub> adalah

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,6074 & 0,3599 \\ 0,6074 & 1 & 0,1840 \\ 0,3599 & 0,1840 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks korelasi  $\mathbf{R}$ , koefisien korelasi antara COD dan DO adalah 0,6074, koefisien korelasi antara COD dan PO<sub>4</sub> adalah 0,3599 dan koefisien korelasi antara DO dan PO<sub>4</sub> adalah 0,1840. Koefisien korelasi antar peubah acak dari populasi distribusi Weibull multivariat adalah nonnegatif (Lu dan Bhattacharyya, 1990).

#### 6.4. Penaksiran Parameter Model RWM

Penerapan model RWM pada data indikator pencemaran air sungai di Surabaya pada penelitian ini dibatasi pada model regresi Weibull trivariat (RWT) dengan empat kovariat, dengan pertimbangan ukuran sampel yang relatif kecil. Empat kovariat tersebut adalah kecepatan aliran air ( $X_1$ ), debit air ( $X_2$ ), konsentrasi deterjen ( $X_3$ ), dan TSS ( $X_4$ ). Berdasarkan model RWM yang disajikan pada persamaan (4.10) dan memperhatikan persamaan (2.15) untuk  $m=3$  dan  $p=4$ , model RWT dengan empat kovariat adalah

$$f(y_1, y_2, y_3) = \left( \prod_{k=1}^3 \frac{\gamma_k}{a} (y_k)^{(\gamma_k/a)-1} \exp \left[ -\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x} \right] \right) A^{a-3} Q \exp[-A^a], \quad (6.1)$$

dengan

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^3 (y_k)^{\frac{\gamma_k}{a}} \exp \left[ -\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x} \right] \\ &= \sum_{k=1}^3 (y_k)^{\frac{\gamma_k}{a}} \exp \left[ -\frac{\gamma_k}{a} (\beta_{k0} + \beta_{k1}X_1 + \beta_{k2}X_2 + \beta_{k3}X_3 + \beta_{k4}X_4) \right] \text{ dan} \end{aligned}$$

$$Q = a(a-1)(a-2) - 3a^2(a-1)A^a + a^3A^{2a}.$$

Berdasarkan persamaan (6.1), fungsi *survival* bersama diberikan oleh

$$S(y_1, y_2, y_3) = P(Y_1 > y_1, Y_2 > y_2, Y_3 > y_3) \\ = \exp \left( - \left( \sum_{k=1}^3 (y_k)^{\frac{\gamma_k}{a}} \exp \left[ - \frac{\gamma_k}{a} (\beta_{k0} + \beta_{k1}X_1 + \beta_{k2}X_2 + \beta_{k3}X_3 + \beta_{k4}X_4) \right] \right)^a \right). \quad (6.2)$$

Model RWT dengan empat kovariat yang diberikan oleh persamaan (6.1) mempunyai 19 parameter, yaitu sebuah parameter derajat *dependence*, 3 parameter bentuk dan 15 parameter regresi. Berdasarkan persamaan (6.1), vektor parameter regresi model RWM adalah

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1^T \quad \boldsymbol{\beta}_2^T \quad \boldsymbol{\beta}_3^T]^T,$$

dengan

$$\boldsymbol{\beta}_1 = [\beta_{10} \quad \beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \beta_{13} \quad \beta_{14}]^T, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = [\beta_{20} \quad \beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \beta_{23} \quad \beta_{24}]^T \text{ dan} \\ \boldsymbol{\beta}_3 = [\beta_{30} \quad \beta_{31} \quad \beta_{32} \quad \beta_{33} \quad \beta_{34}]^T.$$

Model RWT data indikator pencemaran air COD, DO dan PO<sub>4</sub> pada penelitian ini untuk selanjutnya dinamakan model RWM data indikator air.

Penaksiran parameter model RWM menggunakan metode MLE. Proses penghitungan vektor gradien dan matriks Hessian dilakukan secara numerik dan penaksir ML ( $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ) diperoleh dengan metode iterasi Newton-Raphson. Komponen-komponen vektor penaksir parameter derajat *dependence* ( $a$ ) dan parameter bentuk ( $\gamma_k$ ) disajikan pada Tabel 6.6.

Tabel 6.6 Penaksir Parameter Derajat *Dependence* dan Parameter Bentuk Model RWM

Parameter	$a$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
Penaksir	0,8012	1,6247	2,8486	1,7152

Komponen-komponen vektor penaksir parameter regresi, nilai statistik  $Z_n^2$  penaksir parameter regresi dan nilai  $p\_value$  disajikan pada Tabel 6.7. Output penghitungan penaksir ML parameter model RWM dan statistik uji pengujian hipotesis parameter regresi menggunakan program Matlab 7.8.0 disajikan pada Lampiran 4, sedangkan program Matlab disajikan pada Lampiran 8.



Tabel 6.7 Komponen-komponen Vektor Penaksir Parameter Regresi  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  dan Nilai Statistik  $Z_n^2$  Penaksir Parameter Regresi Model RWM

$\beta_1$	$\hat{\beta}_1$	Statistik $Z_n^2$	$p\_value$	$\beta_2$	$\hat{\beta}_2$	Statistik $Z_n^2$	$p\_value$
$\beta_{10}$	-1,0039	0,3289	0,5663	$\beta_{20}$	-1,1555	1,0196	0,3126
$\beta_{11}$	1,0272	5,8929	0,0152	$\beta_{21}$	0,6601	5,1699	0,0223
$\beta_{12}$	-0,0018	11,9882	0,0005	$\beta_{22}$	-0,0006	3,2910	0,0697
$\beta_{13}$	0,0216	4,8235	0,0281	$\beta_{23}$	0,0114	3,5014	0,0613
$\beta_{14}$	0,0149	8,0557	0,0045	$\beta_{24}$	0,0039	1,6033	0,2054

Tabel 6.7 (Lanjutan)

$\beta_3$	$\hat{\beta}_3$	Statistik $Z_n^2$	$p\_value$
$\beta_{30}$	-5,3730	6,4384	0,0112
$\beta_{31}$	0,0796	0,0234	0,8784
$\beta_{32}$	-0,0004	0,4788	0,4890
$\beta_{33}$	0,0332	8,7947	0,0030
$\beta_{34}$	-0,0060	1,4021	0,2364

Nilai statistik  $Z_n^2$  yang disajikan pada Tabel 6.7 adalah nilai statistik uji pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara parsial dan digunakan dalam penentuan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model RWM atau FKP indikator pencemaran air sungai di Surabaya.

Berdasarkan penaksir ML parameter model RWM yang disajikan pada Tabel 6.6 dan 6.7, serta memperhatikan model RWM yang diberikan oleh persamaan (6.1), vektor koefisien kovariat yang bersesuaian dengan respon  $Y_1$ ,  $Y_2$  dan  $Y_3$  masing-masing adalah

$$-\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{a}} \hat{\beta}_1 = [2,0356 \quad -2,0830 \quad 0,0036 \quad -0,0438 \quad -0,0302]^T,$$

$$-\frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{a}} \hat{\beta}_2 = [4,1080 \quad -2,3469 \quad 0,0022 \quad -0,0405 \quad -0,0140]^T$$

dan

$$-\frac{\hat{\gamma}_3}{\hat{a}} \hat{\beta}_2 = [11,5017 \quad -0,1703 \quad 0,0009 \quad -0,0711 \quad 0,0128]^T.$$

Bilangan didepan peubah  $y_1$ ,  $y_2$  dan  $y_3$  masing-masing adalah nilai-nilai  $\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{a}}, \frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{a}}$

dan  $\frac{\hat{\gamma}_3}{\hat{a}}$ , yaitu berturut-turut adalah 2,0277; 3,5552 dan 2,1406. Pangkat peubah

$y_1$ ,  $y_2$  dan  $y_3$  masing-masing adalah nilai-nilai  $\frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{a}} - 1$ ,  $k = 1, 2, 3$ , yaitu berturut-turut adalah 1,0277; 2,5552 dan 1,1406. Berdasarkan model RWM yang diberikan oleh persamaan (6.1) dan berdasarkan penaksir ML parameter derajat *dependence*, penaksir parameter bentuk yang disajikan pada Tabel 6.6, serta memperhatikan hasil penghitungan vektor-vektor koefisien kovariat, didapat penaksir model RWM data indikator pencemaran air sungai di Surabaya, yaitu

$$\begin{aligned} \hat{f}(y_1, y_2, y_3) = & 2,0277 y_1^{1,0277} \exp[2,0356 - 2,0830 X_1 + 0,0036 X_2 - 0,0438 X_3 - 0,0302 X_4] \times \\ & 3,5552 y_2^{2,5552} \exp[4,1080 - 2,3469 X_1 + 0,0022 X_2 - 0,0405 X_3 - 0,0140 X_4] \times \\ & 2,1406 y_3^{1,1406} \exp[11,5017 - 0,1703 X_1 + 0,0009 X_2 - 0,0711 X_3 + 0,0128 X_4] \times \\ & \hat{A}^{(-2,1988)} (0,1909 + 0,3828 \hat{A}^{0,8012} + 0,5144 \hat{A}^{1,6025}) \exp[-\hat{A}^{0,8012}], \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \hat{A} = & y_1^{2,0277} \exp[2,0356 - 2,0830 X_1 + 0,0036 X_2 - 0,0438 X_3 - 0,0302 X_4] + \\ & y_2^{3,5552} \exp[4,1080 - 2,3469 X_1 + 0,0022 X_2 - 0,0405 X_3 - 0,0140 X_4] + \\ & y_3^{2,1406} \exp[11,5017 - 0,1703 X_1 + 0,0009 X_2 - 0,0711 X_3 + 0,0128 X_4]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Berdasarkan penaksir parameter model RWM yang disajikan pada Tabel 6.6 dan 6.7, serta memperhatikan sifat invarian panaksir ML, maka penaksir fungsi *survival* indikator pencemaran air COD, DO dan konsentrasi  $PO_4$  adalah

$$S(y_1, y_2, y_3) = \exp[-\hat{A}^{0,8012}], \quad (6.4)$$

dengan  $\hat{A}$  diberikan oleh persamaan (6.3).

## 6.5. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM

Pengujian hipotesis parameter regresi model RWM terdiri dari pengujian parameter regresi secara serentak dan parsial. Pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak untuk mengkonfirmasi apakah kovariat-kovariat secara bersama-sama berpengaruh terhadap model RWM. Pengujian parameter regresi

model RWM secara parsial untuk mengkonfirmasi apakah kovariat-kovariat secara individual berpengaruh terhadap model RWM atau FKP indikator pencemaran air.

### 6.5.1. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM secara Serentak

Pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak dilakukan terhadap seluruh parameter regresi model RWM dengan rumusan hipotesis disajikan pada persamaan (4.54), yaitu

$$H_0 : \beta_{1h} = \beta_{2h} = \beta_{3h} = 0, \quad h = 1, 2, 3, 4$$

$$H_1 : \text{Paling sedikit terdapat satu } \beta_{kh} \neq 0, \quad k = 1, 2, 3; \quad h = 1, 2, 3, 4.$$

Statistik uji pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak adalah  $G_n$  yang diberikan oleh persamaan (4.60) dalam Teorema 4.3, yaitu

$$G_n = 2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)) = 2(L(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{rw}) - L(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_0)).$$

Pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak menolak  $H_0$  pada taraf uji 0,05, jika nilai  $G_n > \chi^2_{(0,05;12)} = 21,0300$ . Diketahui  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{rw}$  adalah himpunan penaksir parameter di bawah populasi yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood*  $L(\boldsymbol{\Omega}_{rw})$ , yakni penaksir ML parameter model RWM yang disajikan pada Tabel 6.6 dan 6.7. Diketahui  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_0$  adalah himpunan penaksir ML parameter pada  $H_0$  yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood*  $L(\boldsymbol{\Omega}_0)$ , yaitu berturut-turut adalah  $\hat{\alpha}_0 = 0,7182$ ;  $\hat{\gamma}_{01} = 1,1353$ ;  $\hat{\gamma}_{02} = 2,2972$ ;  $\hat{\gamma}_{03} = 1,2486$ ;  $\hat{\beta}_{010} = 3,5861$ ;  $\hat{\beta}_{020} = 1,5240$  dan  $\hat{\beta}_{030} = -1,2834$ . Hasil penghitungan statistik  $G_n$  dan kesimpulan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak disajikan pada Tabel 6.8.

Tabel 6.8 Hasil Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM secara Serentak

$L(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{rw})$	$L(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_0)$	Statistik $G_n$	$db$	$\chi^2_{(0,05;12)}$	Kesimpulan Uji
-142,9498	-161,3719	36,8442	12	21,0300	Menolak $H_0$

Berdasarkan hasil penghitungan pada Tabel 6.8 didapat nilai statistik  $G_n$  adalah 36,8442, dimana nilai  $G_n > \chi^2_{(0,05;12)} = 21,0300$ , sehingga kesimpulan pengujian hipotesis adalah menolak  $H_0$  pada taraf uji  $\alpha = 0,05$ . Berdasarkan hasil pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak diperoleh kesimpulan bahwa kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen dan TSS secara bersama-sama berpengaruh terhadap RWM indikator pencemaran air COD, DO dan  $PO_4$  pada air sungai di Surabaya.

### 6.5.2. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM secara Parsial

Pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial dilakukan terhadap semua parameter regresi model RWM, dengan rumusan hipotesis

$$H_0 : \beta_{kh} = 0$$

$$H_1 : \beta_{kh} \neq 0 \text{ untuk } k = 1, 2, 3 \text{ dan } h = 1, 2, 3, 4.$$

Statistik uji pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara parsial adalah statistik Wald, yang diberikan oleh persamaan (2.30), yaitu

$$Z_n^2 = \frac{\hat{\beta}_{kh}^2}{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_{kh})},$$

dimana statistik uji  $Z_n^2$  berdistribusi  $\chi^2$  dengan derajat bebas 1. Daerah kritis uji ini adalah menolak  $H_0$  pada taraf uji 0,05 jika nilai  $Z_n^2 > \chi^2_{(0,05;1)} = 3,841$  atau menolak  $H_0$  jika  $p\_value < 0,05$ . Hasil pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial terhadap seluruh kovariat model RWM disajikan pada Tabel 6.9.

Berdasarkan hasil penghitungan pada Tabel 6.9, nilai statistik  $Z_n^2$  parameter regresi  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{21}$  dan  $\beta_{31}$  untuk kovariat kecepatan aliran air ( $X_1$ ), masing-masing adalah 5,8929; 5,1699 dan 0,0234. Nilai statistik  $Z_n^2$  untuk parameter regresi  $\beta_{11}$  dan  $\beta_{21}$  masing-masing lebih dari  $\chi^2_{(0,05;1)} = 3,841$  dan statistik  $Z_n^2$  parameter regresi  $\beta_{31}$  kurang dari 3,841, sehingga kesimpulan pengujian secara parsial terhadap parameter regresi  $\beta_{11}$  dan  $\beta_{21}$  masing-masing menolak  $H_0$ , dan gagal menolak  $H_0$  untuk parameter regresi  $\beta_{31}$ .

Tabel 6.9 Hasil Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model RWM secara Parsial

Kovariat	Parameter Regresi	Statistik $Z_n^2$	$p\_value$	Kesimpulan Uji	Berpengaruh/ Tidak berpengaruh
Kecepatan aliran air	$\beta_{11}$	5,8929	0,0152	Menolak $H_0$	Kecepatan aliran air berpengaruh terhadap RWM
	$\beta_{21}$	5,1699	0,0223	Menolak $H_0$	
	$\beta_{31}$	0,0234	0,8784	Gagal menolak $H_0$	
Debit air	$\beta_{12}$	11,9882	0,0005	Menolak $H_0$	Debit air berpengaruh terhadap RWM
	$\beta_{22}$	3,2910	0,0697	Gagal menolak $H_0$	
	$\beta_{32}$	0,4788	0,4890	Gagal menolak $H_0$	
Konsentrasi deterjen	$\beta_{13}$	4,8235	0,0281	Menolak $H_0$	Konsentrasi deterjen berpengaruh terhadap RWM
	$\beta_{23}$	3,5014	0,0613	Gagal menolak $H_0$	
	$\beta_{33}$	8,7947	0,0030	Menolak $H_0$	
TSS	$\beta_{14}$	8,0557	0,0045	Menolak $H_0$	TSS berpengaruh terhadap RWM
	$\beta_{24}$	1,6033	0,2054	Gagal menolak $H_0$	
	$\beta_{34}$	1,4021	0,2364	Gagal menolak $H_0$	

Berdasarkan hasil pengujian secara parsial terhadap parameter-parameter regresi  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{21}$  dan  $\beta_{31}$  disimpulkan, kecepatan aliran air secara individual berpengaruh terhadap RWM indikator pencemaran air. Berdasarkan hasil pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial terhadap seluruh kovariat yang disajikan pada Tabel 6.9 disimpulkan, kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen dan TSS masing-masing secara individual berpengaruh terhadap model RWM indikator pencemaran air. Berdasarkan kesimpulan pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial terhadap seluruh kovariat disimpulkan, faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model RWM indikator pencemaran air Sungai di Surabaya adalah kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen dan TSS.

## 6.6. Interpretasi Model RWM

Penginterpretasian model RWM pada penelitian ini dilakukan terhadap model fungsi *survival*. Berdasarkan model parameter skala yang diberikan oleh persamaan (4.8), perubahan nilai  $\ln \lambda_k(\mathbf{x})$  karena perubahan nilai kovariat tertentu dari  $X_h$  ke  $X_h + \Delta$  diberikan oleh

$$\ln \lambda_k(\mathbf{x} | X_h + \Delta) - \ln \lambda_k(\mathbf{x} | X_h) = \Delta \beta_{kh},$$

atau ekuivalen

$$R_{\lambda_k}(X_h) = \frac{\lambda_k(\mathbf{x} | X_h + \Delta)}{\lambda_k(\mathbf{x} | X_h)} = e^{\Delta \beta_{kh}}, k = 1, 2, 3; h = 1, 2, 3, 4, \quad (6.5)$$

dimana  $R_{\lambda_k}(X_h)$  menyatakan rasio nilai parameter  $\lambda_k(\mathbf{x})$ . Berdasarkan persamaan (6.5), bahwa setiap kenaikan kovariat  $X_h$  sebesar  $\Delta$  satuan, nilai parameter skala  $\lambda_k(\mathbf{x})$  menjadi  $e^{\Delta \beta_{kh}}$  kali (Hosmer dkk, 2008).

Berdasarkan persamaan (6.5) dan (6.4), serta memperhatikan penaksir ML parameter model RWM yang disajikan pada Tabel 6.6 dan 6.7, setiap kenaikan kovariat  $X_h$  sebesar  $\Delta$  satuan dengan nilai kovariat lainnya tetap, maka prediksi rasio nilai fungsi *survival* diberikan oleh

$$\hat{R}_S(X_{hi}) = \frac{\hat{S}((y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}), \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}} | X_{hi} + \Delta)}{\hat{S}((y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}), \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}} | X_{hi})} = \exp[\hat{A}_i^{\hat{a}} - \hat{A}_{i(X_{hi}+\Delta)}^{\hat{a}}], \quad (6.6)$$

untuk  $h = 1, 2, 3, 4$  dan  $i = 1, 2, \dots, 27$ , dimana  $\hat{A}_i$  diberikan oleh persamaan (6.3) dan  $\hat{A}_{i(X_{hi}+\Delta)}$  adalah nilai  $\hat{A}_i$  pada  $X_h = X_{hi} + \Delta$  dengan nilai kovariat lainnya tetap.

Tabel 6.10 Rasio Nilai Fungsi *Survival*

Kovariat ( $X_h$ )	Parameter Regresi ( $\beta_{kh}$ )	$\hat{\beta}_{kh}$	Penaksir Koefisien Kovariat ( $-\frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{a}} \hat{\beta}_{kh}$ )	$\hat{R}_S(X_{hs})$
Kecepatan aliran air	$\beta_{11}$	1,0272	-2,0830	3,3799
	$\beta_{21}$	0,6601	-2,3469	
	$\beta_{31}$	-0,0796	-0,1703	
Debit air	$\beta_{12}$	-0,0018	0,0036	0,9962
	$\beta_{22}$	-0,0006	0,0022	
	$\beta_{32}$	-0,0004	0,0009	
Konsentrasi deterjen	$\beta_{13}$	0,0216	-0,0438	1,1223
	$\beta_{23}$	0,0114	-0,0405	
	$\beta_{33}$	0,0332	-0,0711	
TSS	$\beta_{14}$	0,0149	-0,0302	1,0078
	$\beta_{24}$	0,0039	-0,0140	
	$\beta_{34}$	-0,0068	0,0128	

Berdasarkan persamaan (6.2),  $\hat{R}_S(X_{hi})$  yang diberikan oleh persamaan (6.6) diinterpretasikan sebagai kenaikan peluang peningkatan COD, DO dan konsentrasi  $PO_4$  dari level tertentu karena peningkatan nilai  $X_{hi}$  sebesar  $\Delta$  satuan. Jika peluang peningkatan COD, DO dan  $PO_4$  dari level tertentu naik, maka peluang pencemaran air sungai akan meningkat. Hasil penghitungan prediksi rasio nilai fungsi *survival* pada pengamatan ke-5 disajikan pada Tabel 6.10. Nilai rasio fungsi *survival* setiap kenaikan kovariat sebesar 1 satuan yang disajikan pada Tabel 6.10 dievaluasi pada pengamatan ke-5, dengan nilai respon dan kovariat berturut-turut adalah COD sebesar 85,418 mg/l, DO = 6,700 mg/l,  $PO_4$  = 0,3294 mg/l, kecepatan aliran air adalah 1,00 m/dt, debit air adalah 2,00 l/dt, konsentrasi deterjen adalah 122,910 mg/l dan TSS adalah 5 mg/l.

Berdasarkan hasil penghitungan rasio pada Tabel 6.10 dan memperhatikan hasil pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara parsial yang disajikan pada Tabel 6.9, interpretasi nilai fungsi *survival* ( $\hat{R}_S$ ) pada level COD, DO dan  $PO_4$  berturut-turut 85,418 mg/l; 6,700 mg/l dan 0,3294 mg/l adalah sebagai berikut :

1. Penaksir koefisien kovariat kecepatan aliran air ( $X_1$ ) yang bersesuaian dengan parameter regresi  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{21}$  dan  $\beta_{31}$  masing-masing adalah -2,0830; -2,3469 dan -0,1703, memberikan nilai  $\hat{R}_S$  sebesar 3,3799. Interpretasinya adalah setiap kenaikan kecepatan aliran air sebesar 1 m/dt, peluang (resiko) pencemaran air sungai akan naik sebesar 237,99%, dengan asumsi selain kecepatan aliran air, nilai kovariat lainnya tetap.
2. Penaksir koefisien kovariat debit air ( $X_2$ ) yang bersesuaian dengan parameter regresi  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{22}$  dan  $\beta_{32}$  masing-masing adalah 0,0036; 0,0022 dan 0,0009, memberikan nilai  $\hat{R}_S$  sebesar 0,9962. Interpretasinya adalah setiap kenaikan debit air sebesar 1 l/dt, peluang (resiko) pencemaran air sungai akan turun sebesar 0,38% , dengan asumsi selain debit air, nilai kovariat lainnya tetap.
3. Penaksir koefisien kovariat konsentrasi deterjen ( $X_3$ ) yang bersesuaian dengan parameter regresi  $\beta_{13}$ ,  $\beta_{23}$  dan  $\beta_{33}$  masing-masing adalah -0,0438; -0,0405 dan -0,0711, memberikan nilai  $\hat{R}_S$  sebesar 1,1362. Interpretasinya adalah

setiap kenaikan konsentrasi deterjen sebesar 1 mg/l, peluang (resiko) pencemaran air sungai akan naik sebesar 12,23%, dengan asumsi selain konsentrasi deterjen, nilai kovariat lainnya tetap.

4. Penaksir koefisien kovariat TSS ( $X_4$ ) yang bersesuaian dengan parameter regresi  $\beta_{14}$ ,  $\beta_{24}$  dan  $\beta_{34}$  masing-masing adalah -0,0302; -0,0140 dan 0,0128, memberikan nilai  $\hat{R}_s$  sebesar 1,0078. Interpretasinya adalah setiap kenaikan TSS sebesar 1 mg/l, peluang (resiko) pencemaran air sungai akan naik sebesar 0,78%, dengan asumsi selain TSS, nilai kovariat lainnya tetap.

Ekspektasi peubah acak (respon)  $Y_k$  dapat dihitung berdasarkan fungsi pembangkit momen (FPM) yang diberikan oleh persamaan (2.19), yaitu

$$E(Y_k) = \lambda_k \Gamma\left(\frac{1}{\gamma_k} + 1\right), k = 1, 2, 3,$$

dan memperhatikan persamaan (4.8) serta penaksir parameter model RWM pada Tabel 6.6 dan 6.7, prediksi ekspektasi dari respon  $Y_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  diberikan oleh

$$\hat{E}(Y_k) = \Gamma\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_k} + 1\right) \exp[\hat{\beta}_{k0} + \hat{\beta}_{k1}X_1 + \hat{\beta}_{k2}X_2 + \hat{\beta}_{k3}X_3 + \hat{\beta}_{k4}X_4], \quad (6.7)$$

dengan  $\Gamma(\cdot)$  menyatakan fungsi gamma. Prediksi nilai respon  $\hat{y}_{ki}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, 27$  ditentukan berdasarkan prediksi ekspektasi dari respon yang diberikan oleh persamaan (6.7), yaitu

$$\hat{y}_{ki} = \Gamma\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_k} + 1\right) \exp[\hat{\beta}_{k0} + \hat{\beta}_{k1}X_{1i} + \hat{\beta}_{k2}X_{2i} + \hat{\beta}_{k3}X_{3i} + \hat{\beta}_{k4}X_{4i}].$$

Berdasarkan hasil penghitungan prediksi  $\hat{y}_{ki}$  yang disajikan pada Lampiran 12, prediksi  $\hat{y}_{ki}$  untuk  $k = 1, 2, 3$  dan  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  disajikan pada Tabel 6.11.

Tabel 6.11 Prediksi Nilai Pengamatan Respon

$i$	$\hat{y}_{1i}$	$\hat{y}_{2i}$	$\hat{y}_{3i}$
1	24,2414	3,1220	0,2984
2	52,3071	5,3663	0,1981
3	60,9466	4,3949	0,0699
4	109,9285	6,1988	0,2308
5	100,2871	5,7287	0,2340



Berdasarkan hasil penghitungan prediksi nilai pengamatan respon  $\hat{y}_{ki}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2, \dots, 27$  pada Lampiran 12, nilai *mean squares error* (MSE) dari prediksi nilai pengamatan respon  $Y_1$ ,  $Y_2$  dan  $Y_3$  masing-masing adalah 551,5943; 2,2519 dan 0,0424.

## 6.7. Pengujian Heterogenitas Spasial

Pengujian heterogenitas spasial adalah salah satu analisis yang dilakukan dalam pemodelan GWR, yaitu pengujian adanya ketergantungan respon terhadap lokasi geografis. Pengujian heterogenitas spasial pada penelitian ini dilakukan terhadap model RWM. Pengujian heterogenitas spasial dilakukan melalui pengujian heteroskedastisitas model regresi kuadrat *error* antara model RWM dan FKP terhadap semua kovariat. Rumusan hipotesis pengujian heterogenitas spasial diberikan oleh persamaan (2.51), yaitu

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_{27}^2 = \sigma^2$$

(tidak ada heterogenitas spasial pada model RWM)

$$H_1 : \text{Paling sedikit ada satu } \sigma_i^2 \neq \sigma^2 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, 27$$

(ada heterogenitas spasial pada model RWM).

Statistik uji pengujian heterogenitas spasial adalah statistik  $F$  diberikan oleh persamaan (2.53), dimana  $F \sim F_{(p; n-p-1)}$ . Hasil penghitungan nilai SSR, SSE, statistik  $F$  dan  $F_{(0,05; (p; n-p-1))}$  untuk banyaknya kovariat  $p = 4$  dan ukuran sampel  $n = 27$  disajikan pada Tabel 6.12.

Tabel 6.12 Hasil Pengujian Heterogenitas Spasial Model RWM

SSR	SSE	Statistik $F$	$F_{(0,05; (4; 22))}$	Kesimpulan Uji
$9,0965 \times 10^{-7}$	$1,1331 \times 10^{-6}$	4,4155	2,8700	Menolak $H_0$

Berdasarkan hasil penghitungan pada Tabel 6.12, nilai Statistik  $F$  adalah 5,1559 dimana nilai  $F > F_{(0,05; (4, 22))} = 2,8700$ , sehingga pada taraf uji  $\alpha = 5\%$  hipotesis nol ditolak dan disimpulkan terdapat heterogenitas spasial pada model RWM. Ouput Matlab 7.8.0 pengujian heterogenitas spasial disajikan pada Lampiran 4c.

## 6.8. Penaksiran Parameter Model GWMWR

Berdasarkan persamaan (5.1) dan (2.15) serta memperhatikan persamaan (6.1), model *geographically weighted trivariate Weibull regression* (GWTWR) pada lokasi ke- $i$  dengan empat kovariat adalah

$$f(y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}) = \left( \prod_{k=1}^3 \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} (y_{ki})^{(\gamma_k(\mathbf{u}_i)/a(\mathbf{u}_i))^{-1}} \exp \left[ -\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i \right] \right) \times [\mathcal{A}(\mathbf{u}_i)]^{a(\mathbf{u}_i)-3} \mathcal{Q}(\mathbf{u}_i) \exp(-[\mathcal{A}(\mathbf{u}_i)]^{a(\mathbf{u}_i)}), \quad (6.8)$$

dengan

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}_i) &= \mathcal{A}_i = \sum_{k=1}^3 (y_{ki})^{\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)}} \exp \left[ -\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i \right] \\ &= \sum_{k=1}^3 (y_{ki})^{\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)}} \exp \left[ -\frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} (\beta_{k0}(\mathbf{u}_i) + \beta_{k1}(\mathbf{u}_i) X_{1i} + \dots + \beta_{k4}(\mathbf{u}_i) X_{4i}) \right], \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\mathbf{u}_i) &= \mathcal{Q}_i = a(\mathbf{u}_i)[a(\mathbf{u}_i) - 1][a(\mathbf{u}_i) - 2] - 3a^2(\mathbf{u}_i)[a(\mathbf{u}_i) - 1][\mathcal{A}(\mathbf{u}_i)]^{a(\mathbf{u}_i)} + \\ &\quad a^3(\mathbf{u}_i)[\mathcal{A}(\mathbf{u}_i)]^{2a(\mathbf{u}_i)}. \end{aligned}$$

Penaksiran parameter model GWMWR pada penelitian ini menggunakan metode MLE. Diketahui persamaan *log-likelihood* model GWMWR adalah tidak *closed form*, sehingga penaksir ML eksak tidak dapat ditemukan secara analitikal. Penaksir ML model GWMWR dihampiri oleh akar-akar persamaan *likelihood* yang diselesaikan secara iteratif dengan metode Newton-Raphson. Berdasarkan metode GWR, penaksiran parameter model GWMWR dilakukan secara lokal pada setiap lokasi pengamatan, yakni di 9 lokasi pengamatan dan menggunakan pembobot spasial. Lokasi pengamatan disajikan pada Tabel 3.1 dan pembobot spasial ditentukan menggunakan fungsi pembobot.

Fungsi pembobot spasial pada penaksiran parameter model GWMWR adalah fungsi Gauss adaptif, *bi-square* adaptif dan *tricube* adaptif, dimana *bandwidth* optimal ditentukan menggunakan kriteria BIC. *Bandwidth* pada penaksiran parameter model GWMWR di setiap lokasi pengamatan diperoleh melalui simulasi, yakni *bandwidth* dipilih dari nilai-nilai di dalam interval  $0,6 \times \max(d_{ij}) < b_i \leq 50 \times \max(d_{ij})$ , yang memberikan nilai BIC minimum. Model GWMWR indikator pencemaran air sungai di Surabaya dipilih dari hasil-hasil

penaksiran parameter menggunakan ketiga fungsi pembobot spasial tersebut, yang memberikan nilai BIC minimum. Nilai BIC dan AIC berdasarkan hasil penaksiran parameter model GWMWR menggunakan fungsi pembobot Gauss adaptif, *bi-square* adaptif dan *tricube* adaptif disajikan pada Tabel 6.13.

Tabel 6.13 Nilai BIC dan AIC Model GWMWR  
Berdasarkan Fungsi Pembobot Spasial

Fungsi Pembobot	Nilai BIC	Nilai AIC
Gauss adaptif	332,7618	308,1409
<i>Bi-square</i> adaptif	335,3426	310,7217
<i>Tricube</i> adaptif	337,0056	312,3847

Berdasarkan nilai BIC dan AIC pada Tabel 6.13, bahwa penaksiran parameter menggunakan fungsi pembobot Gauss adaptif menghasilkan model GWMWR data indikator pencemaran air di Surabaya terbaik, dengan nilai BIC dan AIC minimum, yaitu masing-masing adalah 332,7618 dan 308,1409.

Tabel 6.14 Pembobot Spasial menggunakan Fungsi Pembobot Spasial Gauss

Lokasi ( <i>j</i> )	Nomor Lokasi	$w_{1j}$	$w_{2j}$	$w_{3j}$	$w_{4j}$	$w_{5j}$
1	1	1,0000	0,7954	0,8064	0,9999	0,4793
2	2	0,7991	1,0000	0,9967	0,9999	0,7207
3	3	0,7472	0,9955	1,0000	0,9999	0,7440
4	4	0,5703	0,9075	0,9511	1,0000	0,8856
5	5	0,2837	0,5641	0,6881	0,9999	1,0000
6	18	0,7084	0,9799	0,9916	0,9999	0,8051
7	24	0,9898	0,7360	0,7567	0,9999	0,4618
8	25	0,5481	0,2597	0,3391	0,9998	0,2700
9	26	0,9404	0,9368	0,9280	0,9999	0,6364
<i>bandwith</i>		0,0535	0,0530	0,0623	4,9736	0,0700

Tabel 6.14 (Lanjutan)

Lokasi ( <i>j</i> )	Nomor Lokasi	$w_{6j}$	$w_{7j}$	$w_{8j}$	$w_{9j}$
1	1	0,7542	0,9899	0,7125	0,9273
2	2	0,9839	0,7423	0,4750	0,9244
3	3	0,9907	0,6875	0,4380	0,8831
4	4	0,9768	0,5258	0,3776	0,7325
5	5	0,7380	0,2689	0,2826	0,3864
6	18	1,0000	0,6580	0,4426	0,8634
7	24	0,7081	1,0000	0,7739	0,8929
8	25	0,3062	0,6368	1,0000	0,3678
9	26	0,9068	0,9125	0,6319	1,0000
<i>Bandwith</i>		0,0591	0,0537	0,0713	0,0483

Pembobot spasial dan *bandwidth* pada penaksiran parameter model GWMWR di 9 lokasi pengamatan dengan menggunakan fungsi Gauss adaptif disajikan pada Tabel 6.14, sedangkan output penghitungan jarak *Euclidean* dan pembobot spasial dengan program Matlab disajikan pada Lampiran 5. Berdasarkan pada Tabel 6.14, serta memperhatikan lokasi titik sampel yang disajikan pada Tabel 3.1, bobot spasial yang diberikan kepada pengamatan pada lokasi ke-2 dan pengamatan lokasi ke-5 untuk model GWMWR pada lokasi ke-1 masing-masing adalah  $w_{12} = 0,7991$  dan  $w_{15} = 0,2837$ . Berdasarkan lokasi pengamatan pada Gambar 3.1, jarak antara lokasi pengamatan ke-1 dan lokasi pengamatan ke-2 lebih dekat dari pada jarak antara lokasi pengamatan ke-1 dan lokasi pengamatan ke-5. Berdasarkan metode GWR, model GWMWR pada lokasi ke-1 lebih dipengaruhi oleh pengamatan pada lokasi ke-2 dari pada pengamatan pada lokasi ke-5, sehingga bobot spasial yang diberikan kepada pengamatan pada lokasi ke-2 lebih besar dari bobot yang diberikan kepada pengamatan pada lokasi ke-5. Berdasarkan hasil penghitungan pada Tabel 6.14, bahwa  $w_{12} \neq w_{21}$ , yakni pembobot spasial yang diberikan kepada pengamatan ke-2 untuk model GWMWR pada lokasi ke-1 tidak sama bobot spasial yang diberikan kepada pengamatan ke-1

untuk model GWMWR pada lokasi ke-2, karena nilai *bandwidth* untuk model pada lokasi ke-1 dan lokasi ke-2 tidak sama, dimana *bandwidth* yang digunakan pada penelitian ini adalah *bandwidth* adaptif. Berdasarkan pembobot spasial yang disajikan pada Tabel 6.14, matriks pembobot pada penaksiran parameter dengan menggunakan 27 data pengamatan dinyatakan  $\mathbf{W}_{(27 \times 9)}^* = [\mathbf{W} \ \mathbf{W} \ \mathbf{W}]^T$ , dimana  $\mathbf{W}_{(9 \times 9)} = [w_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, 9$ . Output penaksiran parameter model GWMWR di 9 lokasi pengamatan dan nilai *bandwidth* adaptif dengan fungsi pembobot spasial Gauss, *bi-square* dan *tricube* dengan program Matlab 7.8.0, masing-masing disajikan pada Lampiran 5, 6 dan 7, sedangkan program Matlab disajikan pada Lampiran 9.

Berdasarkan hasil penaksiran parameter model GWMWR dengan fungsi pembobot Gauss adaptif yang disajikan pada Lampiran 5, berikut ini ditampilkan dua model GWMWR indikator pencemaran air, yaitu model pada lokasi pengamatan ke-1 dan ke-5.

Tabel 6.15 Penaksir Parameter Derajat *Dependence* dan Parameter Bentuk Model GWMWR pada Kali Surabaya Di Kedurus

Parameter	$a(\mathbf{u}_1)$	$\gamma_1(\mathbf{u}_1)$	$\gamma_2(\mathbf{u}_1)$	$\gamma_3(\mathbf{u}_1)$
Penaksir	0,7633	1,6877	2,9056	1,6341

Tabel 6.16 Vektor Penaksir Parameter Regresi Model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus

$\beta_1(\mathbf{u}_1)$	$\hat{\beta}_1(\mathbf{u}_1)$	$\beta_2(\mathbf{u}_1)$	$\hat{\beta}_2(\mathbf{u}_1)$	$\beta_3(\mathbf{u}_1)$	$\hat{\beta}_3(\mathbf{u}_1)$
$\beta_{10}(\mathbf{u}_1)$	-1,7843	$\beta_{20}(\mathbf{u}_1)$	-1,2816	$\beta_{30}(\mathbf{u}_1)$	-5,9276
$\beta_{11}(\mathbf{u}_1)$	1,1697	$\beta_{21}(\mathbf{u}_1)$	0,6682	$\beta_{31}(\mathbf{u}_1)$	0,2120
$\beta_{12}(\mathbf{u}_1)$	-0,0019	$\beta_{22}(\mathbf{u}_1)$	-0,0005	$\beta_{32}(\mathbf{u}_1)$	-0,0006
$\beta_{13}(\mathbf{u}_1)$	0,0256	$\beta_{23}(\mathbf{u}_1)$	0,0119	$\beta_{33}(\mathbf{u}_1)$	0,0356
$\beta_{14}(\mathbf{u}_1)$	0,0164	$\beta_{24}(\mathbf{u}_1)$	0,0043	$\beta_{34}(\mathbf{u}_1)$	-0,0067

Model lokal pada lokasi pengamatan ke-1 dan ke-5 masing-masing adalah model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus dengan koordinat ( $7^0 19' 21.87''$  LS dan  $112^0 42' 36.57''$  EL) dan model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo

dengan koordinat ( $7^014'35.12''$  LS dan  $112^044'22.66''$  EL). Penaksir parameter derajat *dependence* ( $a$ ) dan parameter bentuk model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus disajikan pada Tabel 6.15, sedangkan vektor penaksir parameter regresi disajikan pada Tabel 6.16.

Berdasarkan penaksir parameter pada Tabel 6.15 dan 6.16, serta memperhatikan model umum GWMWR yang diberikan oleh persamaan (6.8) didapat vektor koefisien kovariat model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus. Vektor-vektor koefisien kovariat yang bersesuaian dengan respon  $Y_1$ ,  $Y_2$  dan  $Y_3$  masing-masing adalah

$$-\frac{\hat{\gamma}_1(\mathbf{u}_1)}{a(\mathbf{u}_2)}\hat{\beta}_1(\mathbf{u}_1) = [3,9450 \quad -2,5861 \quad 0,0043 \quad -0,0567 \quad -0,0363]^T,$$

$$-\frac{\hat{\gamma}_2(\mathbf{u}_1)}{a(\mathbf{u}_2)}\hat{\beta}_2(\mathbf{u}_1) = [4,8786 \quad -2,5437 \quad 0,0020 \quad -0,0454 \quad -0,0164]^T$$

dan

$$-\frac{\hat{\gamma}_3(\mathbf{u}_1)}{a(\mathbf{u}_2)}\hat{\beta}_3(\mathbf{u}_1) = [12,6894 \quad -0,4537 \quad 0,0012 \quad -0,0763 \quad 0,0143]^T.$$

Bilangan didepan peubah  $y_1, y_2$  dan  $y_3$  diperoleh dari nilai-nilai  $\frac{\hat{\gamma}_k(\mathbf{u}_1)}{\hat{a}(\mathbf{u}_1)}$ ,

$k = 1, 2, 3$ , yaitu masing-masing adalah 2,2109; 3,8065 dan 2,1407. Pangkat peubah  $y_1, y_2$  dan  $y_3$  didapat dari  $\frac{\hat{\gamma}_k(\mathbf{u}_1)}{\hat{a}(\mathbf{u}_1)} - 1$ ,  $k = 1, 2, 3$ , yaitu berturut-turut adalah 1,2109; 2,8065 dan 1,1407.

Berdasarkan nilai-nilai ini didapat model GWMWR indikator pencemaran air sungai pada Kali Surabaya di Kedurus, yaitu

$$\begin{aligned} \hat{f}(y_{11}, y_{21}, y_{31}) = & 2,2109y_1^{1,2109} \exp[3,9450 - 2,5861X_1 + 0,0043X_2 - 0,0567X_3 - 0,0363X_4] \times \\ & 3,8065y_2^{2,8065} \exp[4,8786 - 2,5437X_1 + 0,0020X_2 - 0,0454X_3 - 0,0164X_4] \times \\ & 2,1407y_3^{1,1407} \exp[12,6894 - 0,4537X_3 + 0,0012X_4 - 0,0763X_5 + 0,0143X_7] \times \\ & [\hat{A}(\mathbf{u}_1)]^{-2,2367} \left( 0,2234 + 0,4137[\hat{A}(\mathbf{u}_1)]^{0,7633} + 0,4448[\hat{A}(\mathbf{u}_1)]^{1,5267} \right) \exp(-[\hat{A}(\mathbf{u}_1)]^{0,7633}), \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_1) = & y_1^{2,2109} \exp[3,9450 - 2,5861X_1 + 0,0043X_2 - 0,0567X_3 - 0,0363X_4] + \\ & y_2^{3,8065} \exp[4,8786 - 2,5437X_1 + 0,0020X_2 - 0,0454X_3 - 0,0164X_4] + \\ & y_3^{2,1407} \exp[12,6894 - 0,4537X_3 + 0,0012X_4 - 0,0763X_5 + 0,0143X_7].\end{aligned}$$

Nilai *bandwidth* model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus adalah 0,0535.

Berdasarkan hasil penaksiran parameter GWMWR pada Lampiran 5, vektor penaksir parameter model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo adalah kolom kelima dari matriks Tetha\_Topi\_1\_5, yaitu

$$\hat{a}(\mathbf{u}_5) = 0,7473,$$

$$\hat{\gamma}(\mathbf{u}_5) = [1,5550 \quad 2,9639 \quad 1,9058]^T,$$

$$\hat{\beta}_1(\mathbf{u}_5) = [-0,5869 \quad 0,8824 \quad -0,0017 \quad 0,0207 \quad 0,0148]^T,$$

$$\hat{\beta}_2(\mathbf{u}_5) = [-1,1519 \quad 0,6440 \quad -0,0005 \quad 0,0118 \quad 0,0030]^T$$

dan

$$\hat{\beta}_3(\mathbf{u}_5) = [-5,2313 \quad -0,0007 \quad -0,0004 \quad 0,0335 \quad -0,0053]^T.$$

Berdasarkan penaksir parameter derajat *dependence*, vektor penaksir parameter bentuk dan parameter regresi tersebut didapat vektor-vektor koefisien kovariat model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo yang bersesuaian dengan respon  $Y_1$ ,  $Y_2$  dan  $Y_3$ , yaitu masing-masing adalah

$$-\frac{\hat{\gamma}_1(\mathbf{u}_5)}{a(\mathbf{u}_5)} \hat{\beta}_1(\mathbf{u}_5) = [1,2213 \quad -1,8361 \quad 0,0036 \quad -0,0431 \quad -0,0308]^T$$

$$-\frac{\hat{\gamma}_2(\mathbf{u}_5)}{a(\mathbf{u}_5)} \hat{\beta}_2(\mathbf{u}_5) = [4,5689 \quad -2,5544 \quad 0,0019 \quad -0,0469 \quad -0,0118]^T$$

dan

$$-\frac{\hat{\gamma}_3(\mathbf{u}_5)}{a(\mathbf{u}_5)} \hat{\beta}_3(\mathbf{u}_5) = [13,3415 \quad 0,0019 \quad 0,0010 \quad -0,0855 \quad 0,0135]^T.$$

Bilangan-bilangan di depan respon dan pangkat dari respon  $y_1$ ,  $y_2$  dan  $y_3$  masing-masing diperoleh dengan cara yang sama seperti model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus. Berdasarkan hasil penghitungan vektor-vektor koefisien kovariat didapat model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo, yaitu

$$\hat{f}(y_{1,5}, y_{2,5}, y_{3,5}) = \dots$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(y_{1,5}, y_{2,5}, y_{3,5}) = & 2,0810 y_1^{1,0810} \exp[1,2213 - 1,8361X_1 + 0,0036X_2 - 0,0431X_3 - 0,0308X_4] \times \\ & 3,9663 y_2^{2,9663} \exp[4,5689 - 2,5544X_1 + 0,0019X_2 - 0,0469X_3 - 0,0118X_4] \times \\ & 2,5503 y_3^{1,5503} \exp[13,3415 + 0,0019X_1 + 0,0010X_2 - 0,0855X_3 + 0,0135X_4] \times \\ & [\hat{A}(\mathbf{u}_5)]^{-2,2527} \exp(-[\hat{A}(\mathbf{u}_5)]^{0,7473}) \times \\ & (0,2366 + 0,4234[\hat{A}(\mathbf{u}_5)]^{0,7473} + 0,4173[\hat{A}(\mathbf{u}_5)]^{1,4945}), \end{aligned} \quad (6.9)$$

dengan

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathbf{u}_5) = & y_1^{2,0810} \exp[1,2213 - 1,8361X_1 + 0,0036X_2 - 0,0431X_3 - 0,0308X_4] + \\ & y_2^{3,9663} \exp[4,5689 - 2,5544X_1 + 0,0019X_2 - 0,0469X_3 - 0,0118X_4] + \\ & y_3^{2,5503} \exp[13,3415 + 0,0019X_1 + 0,0010X_2 - 0,0855X_3 + 0,0135X_4]. \end{aligned}$$

Nilai *bandwidth* model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo adalah 0,0700.

## 6.9. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Model GWMWR

Pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR pada penelitian ini terdiri dari pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak dan parsial, sedangkan pengujian kesamaan model GWMWR dan RWM tidak dilakukan. Berdasarkan hasil pengujian heterogenitas spasial disimpulkan terdapat heterogenitas spasial pada model RWM, dan berdasarkan kesimpulan ini diasumsikan bahwa model GWMWR (model lokal) berbeda dengan model RWM (model global).

### 6.9.1. Pengujian Hipotesis Parameter Model GWMWR secara Serentak

Rumusan hipotesis pengujian parameter regresi model GWMWR secara serentak adalah

$$\begin{aligned} H_0 : & \beta_{1h}(\mathbf{u}_i) = \beta_{2h}(\mathbf{u}_i) = \beta_{3h}(\mathbf{u}_i) = 0, \quad h = 1, 2, 3, 4 \text{ dan } i = 1, 2, \dots, 27 \\ & \text{(Kovariat-kovariat secara bersama-sama tidak berpengaruh terhadap model GWMWR)} \\ H_1 : & \text{Paling sedikit ada satu } \beta_{kh}(\mathbf{u}_i) \neq 0, \quad k = 1, 2, 3; \quad h = 1, 2, 3, 4 \text{ dan } i = 1, 2, \dots, 27 \\ & \text{(Minimal ada satu kovariat berpengaruh terhadap model GWMWR)} \end{aligned}$$

Statistik uji pengujian parameter regresi model GWMWR secara serentak adalah statistik Young yang diberikan oleh persamaan (2.35), yaitu



$$V_n = \frac{\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}},$$

dengan  $M_i = \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)) - \ln f(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_0(\mathbf{u}_i))$ ,  $\bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$ , dimana  $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i))$  dan  $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_0(\mathbf{u}_i))$  untuk  $i=1, 2, \dots, 27$  masing-masing adalah penaksir model GWMWR di bawah populasi dan di bawah  $H_0$ . Statistik  $V_n$  berdistribusi normal standar, dengan daerah penolakan  $H_0$  pada taraf uji 0,05 adalah  $|V_n| > Z_{0,975} = 1,96$ . Berdasarkan hasil penghitungan didapat nilai statistik  $V_n$  adalah 4,7038, dimana nilai  $V_n > Z_{0,975} = 1,96$ , sehingga kesimpulan pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR secara serentak adalah menolak  $H_0$  atau kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen dan TSS secara bersama-sama berpengaruh terhadap model GWMWR. Output penaksiran parameter dan hasil pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR secara serentak dengan program Matlab disajikan pada Lampiran 5.

### 6.9.2. Pengujian Hipotesis Parameter Model GWMWR secara Parsial

Rumusan hipotesis pengujian parameter regresi model GWMWR secara parsial adalah

$$H_0 : \beta_{kh}(\mathbf{u}_i) = 0,$$

$$H_1 : \beta_{kh}(\mathbf{u}_i) \neq 0, \quad k=1, 2, 3; \quad h=1, 2, 3, 4 \quad \text{dan} \quad i=1, 2, \dots, 27.$$

Statistik uji pengujian parameter regresi secara parsial adalah statistik Wald, yang diberikan oleh persamaan (2.36), yaitu

$$W_n^2 = \frac{\hat{\beta}_{kh}^2(\mathbf{u}_i)}{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_{kh}(\mathbf{u}_i))}.$$

Statistik uji  $W_n^2$  berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat bebas 1. Pada taraf uji  $\alpha = 0,05$ , pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR secara parsial menolak  $H_0$  jika nilai  $W_n^2 > \chi_{(0,05;1)}^2 = 3,841$  atau  $H_0$  ditolak jika  $p\_value < 0,05$ . Nilai statistik  $W_n^2$  penaksir parameter model GWMWR pada 9 lokasi pengamatan

disajikan pada Lampiran 5. Pembahasan ini hanya menampilkan hasil pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus dan model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo. Nilai statistik  $W_n^2$  dan hasil pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial terhadap seluruh kovariat model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus dan model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo masing-masing disajikan pada Tabel 6.17 dan 6.18

Tabel 6.17 Hasil Pengujian Hipotesis Parameter Regresi secara Parsial Model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus

Kovariat	Koefisien Regresi	Statistik $W_n^2$	$p\_value$	Kesimpulan Uji	Berpengaruh/ Tidak berpengaruh
Kecepatan aliran air ( $X_1$ )	$\beta_{11}(\mathbf{u}_1)$	6,3169	0,0120	Menolak $H_0$	$X_1$ berpengaruh terhadap model GWMWR di Kedurus
	$\beta_{21}(\mathbf{u}_1)$	4,3153	0,0378	Menolak $H_0$	
	$\beta_{31}(\mathbf{u}_1)$	0,1157	0,7337	Gagal menolak $H_0$	
Debit air ( $X_2$ )	$\beta_{12}(\mathbf{u}_1)$	11,2178	0,0008	Menolak $H_0$	$X_2$ berpengaruh terhadap model GWMWR di Kedurus
	$\beta_{22}(\mathbf{u}_1)$	1,9369	0,1640	Gagal menolak $H_0$	
	$\beta_{32}(\mathbf{u}_1)$	0,5991	0,4389	Gagal menolak $H_0$	
Konsentrasi Deterjen ( $X_3$ )	$\beta_{13}(\mathbf{u}_1)$	5,7471	0,0165	Menolak $H_0$	$X_3$ berpengaruh terhadap model GWMWR di Kedurus
	$\beta_{23}(\mathbf{u}_1)$	2,8943	0,0889	Gagal menolak $H_0$	
	$\beta_{33}(\mathbf{u}_1)$	7,1413	0,0075	Menolak $H_0$	
TSS ( $X_4$ )	$\beta_{14}(\mathbf{u}_1)$	6,4787	0,0109	Menolak $H_0$	$X_4$ berpengaruh terhadap model GWMWR di Kedurus
	$\beta_{24}(\mathbf{u}_1)$	1,1999	0,2733	Gagal menolak $H_0$	
	$\beta_{34}(\mathbf{u}_1)$	0,9917	0,3193	Gagal menolak $H_0$	

Berdasarkan hasil penghitungan pada Tabel 6.17, nilai statistik  $W_n^2$  parameter regresi  $\beta_{11}, \beta_{21}$  dan  $\beta_{31}$  untuk kovariat kecepatan aliran air ( $X_1$ ) masing-masing adalah 6,3169; 4,3153 dan 0,1157. Nilai statistik  $W_n^2$  parameter regresi  $\beta_{11}$  dan  $\beta_{21}$  masing-masing lebih dari  $\chi_{(0,05;1)}^2 = 3,841$  dan nilai statistik  $W_n^2$  parameter  $\beta_{31}$  kurang dari  $\chi_{(0,05;1)}^2$ , sehingga kesimpulan pengujian hipotesis terhadap parameter regresi  $\beta_{11}$  dan  $\beta_{21}$  adalah menolak  $H_0$ , dan gagal menolak  $H_0$  untuk parameter regresi  $\beta_{31}$ . Berdasarkan hasil pengujian hipotesis secara

parsial terhadap parameter-parameter regresi  $\beta_{11}, \beta_{21}$  dan  $\beta_{31}$  disimpulkan bahwa, kecepatan aliran air secara individual berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus. Berdasarkan hasil pengujian hipotesis secara parsial terhadap seluruh parameter regresi pada Tabel 6.17 disimpulkan bahwa, kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen dan TSS masing-masing secara individual berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus.

Tabel 6.18 Hasil Pengujian Hipotesis Parameter Regresi secara Parsial Model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo

Kovariat	Koefisien Regresi	Statistik $W_n^2$	$p\_value$	Kesimpulan Uji	Berpengaruh/ Tidak berpengaruh
Kecepatan aliran air ( $X_1$ )	$\beta_{11}(\mathbf{u}_5)$	2,6575	0,1031	Gagal menolak $H_0$	$X_1$ tidak berpengaruh terhadap GWMWR di JKR
	$\beta_{21}(\mathbf{u}_5)$	3,3420	0,0675	Gagal menolak $H_0$	
	$\beta_{31}(\mathbf{u}_5)$	1,63e-6	0,9990	Gagal menolak $H_0$	
Debit air ( $X_2$ )	$\beta_{12}(\mathbf{u}_5)$	6,3416	0,0118	Menolak $H_0$	$X_2$ berpengaruh terhadap GWMWR di JKR
	$\beta_{22}(\mathbf{u}_5)$	1,2616	0,2613	Gagal menolak $H_0$	
	$\beta_{32}(\mathbf{u}_5)$	0,3709	0,5425	Gagal menolak $H_0$	
Konsentrasi Deterjen ( $X_3$ )	$\beta_{13}(\mathbf{u}_5)$	2,7410	0,0978	Gagal menolak $H_0$	$X_3$ berpengaruh terhadap GWMWR di JKR
	$\beta_{23}(\mathbf{u}_5)$	2,6470	0,1037	Gagal menolak $H_0$	
	$\beta_{33}(\mathbf{u}_5)$	7,6170	0,0058	Menolak $H_0$	
TSS ( $X_4$ )	$\beta_{14}(\mathbf{u}_5)$	5,5671	0,0183	Menolak $H_0$	$X_4$ berpengaruh terhadap GWMWR di JKR
	$\beta_{24}(\mathbf{u}_5)$	0,8183	0,3657	Gagal menolak $H_0$	
	$\beta_{34}(\mathbf{u}_5)$	1,0850	0,2976	Gagal menolak $H_0$	

Keterangan: JKR = Jembatan Kebon Rojo

Berdasarkan hasil penghitungan pada Tabel 6.18, nilai  $p\_value$  parameter regresi  $\beta_{13}, \beta_{23}$  dan  $\beta_{33}$  pada kovariat konsentrasi deterjen ( $X_3$ ) masing-masing adalah 0,0978; 0,1037 dan 0,0058. Nilai  $p\_value$  parameter regresi  $\beta_{13}, \beta_{23}$  masing-masing lebih dari 0,05 dan nilai  $p\_value$  parameter regresi  $\beta_{33}$  kurang dari 0,05, sehingga kesimpulan pengujian hipotesis terhadap parameter regresi  $\beta_{13}$  dan  $\beta_{23}$  adalah gagal menolak  $H_0$ , dan kesimpulan pengujian hipotesis terhadap parameter regresi  $\beta_{33}$  adalah menolak  $H_0$ . Berdasarkan hasil pengujian hipotesis

secara parsial terhadap parameter-parameter regresi  $\beta_{13}$ ,  $\beta_{23}$  dan  $\beta_{33}$  disimpulkan bahwa, konsentrasi deterjen secara individual berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo.

Berdasarkan hasil pengujian hipotesis secara parsial terhadap seluruh parameter regresi pada Tabel 6.18 disimpulkan bahwa, kecepatan aliran air secara individual tidak berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo, sedangkan debit air, konsentrasi deterjen dan TSS masing-masing secara individual berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo. Output program Matlab penghitungan nilai statistik  $W_n$  dan  $W_n^2$  parameter regresi model GWMWR pada 9 lokasi pengamatan disajikan pada lampiran 5.

Kovariat yang berpengaruh signifikan terhadap model GWMWR pada setiap lokasi pengamatan disajikan pada Tabel 6.19.

Tabel 6.19 Faktor-faktor yang Berpengaruh terhadap Model GWMWR

No.	Lokasi Pengamatan	Faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR
1	Kali Surabaya di Kedurus	$X_1, X_2, X_3, X_4$
2	Kali Surabaya di Jembatabn Wonokromo	$X_1, X_2, X_3, X_4$
3	Kali Mas di Jembatan Ngagel	$X_1, X_2, X_3, X_4$
4	Kali Mas di Jembatan Keputran Selatan	$X_1, X_2, X_3, X_4$
5	Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo	$X_2, X_3, X_4$
6	Saluran Darmo di Pompa air Darmo Kali	$X_1, X_2, X_3, X_4$
7	Bozem Kedurus	$X_1, X_2, X_3, X_4$
8	Kali Makmur di Lidah Kulon	$X_1, X_2, X_4$
9	Kali Banyu Urip di Pompa Gunung Sari	$X_1, X_2, X_3, X_4$

Keterangan :  $X_1$  = kecepatan aliran air,  $X_2$  = debit air,  $X_3$  = konsentrasi deterjen dan  $X_4$  = TSS

Berdasarkan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR yang disajikan pada Tabel 6.19, maka model GWMWR dapat dikelompokkan menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok pertama adalah model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus, Kali Surabaya di Jembatan Wonokromo, Kali Mas di Jembatan Ngagel, Kali Mas di Jembatan Keputran Selatan, Saluran Darmo di

Pompa air Darmo Kali dan Bozem Kedurus. Kelompok kedua adalah model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo dan kelompok ketiga adalah model GWMWR pada Kali Makmur di Lidah Kulon.

Kali Mas adalah cabang Kali Surabaya yang mempunyai hulu di Kabupaten Mojokerto, dimana di sepanjang DAS mulai dari daerah hulu (Mojokerto) sampai daerah hilir (Kali Mas) terdapat banyak industri, pemukiman penduduk dan daerah peternakan (sapi dan itik), yang menghasilkan limbah dalam bentuk TSS dan deterjen. Limbah lingkungan DAS di hulu akan berpindah ke daerah hilir (di sepanjang DAS Kali Surabaya dan Kali Mas) terbawa aliran air, sehingga kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen dan TSS berpengaruh terhadap model GWMWR pada daerah kelompok pertama (daerah hilir).

Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo merupakan daerah hilir, sehingga model GWMWR pada daerah ini dipengaruhi oleh daerah DAS hulu (Kali Surabaya). Berdasarkan lokasi geografis, Kali Mas di Kebon Rojo terletak agak jauh dari simpang tiga Kali Surabaya, Kali Wonokromo dan Kali Mas, sehingga kecepatan aliran air Kali Mas di Kebon Rojo sepanjang tahun relatif konstan, dan tidak berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Mas di Kebon Rojo. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo adalah debit air, konsentrasi deterjen dan TSS.

Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Makmur di Lidah Kulon, adalah kecepatan aliran air, debit air dan TSS. Daerah hulu Kali Makmur berbeda dengan hulu Kali Surabaya, dimana lingkungan DAS hulu Kali Makmur di Lidah Kulon berupa lahan pertanian, sedikit rawa dan pemukiman penduduk. Berdasarkan kondisi fisik, kecepatan aliran dan debit air sepanjang Kali Makmur cukup besar, sehingga walaupun konsentrasi deterjen dari limbah rumah tangga pada Kali ini cukup besar, akan cepat berpindah terbawa aliran air menuju Bozem Kedurus dan Kali Surabaya, hal ini menyebabkan konsentrasi deterjen tidak berpengaruh terhadap model GWMWR pada lokasi ketiga ini.

Berdasarkan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR yang disajikan pada Tabel 6.19 dan memperhatikan hasil penaksiran parameter model GWMWR pada 9 lokasi pengamatan yang disajikan pada Lampiran 5,

disimpulkan bahwa model GWMWR pada setiap lokasi tidak identik dan diduga berbeda dengan model RWM. Nilai BIC dan AIC model RWM dan GWMWR disajikan pada Tabel 6.20.

Tabel 6.20 Nilai BIC dan AIC Model RWM dan GWMWR

Model Regresi	Nilai BIC	Nilai AIC
RWT	348,5204	323,8995
GWTWR	332,7618	308,1409

Berdasarkan nilai BIC dan AIC pada Tabel 6.20, model GWMWR lebih baik dari model RWM, dimana nilai BIC dan AIC model GWMWR masing-masing lebih kecil dari model RWM.

#### 6.10. Interpretasi Model GWMWR

Sub-bab ini membahas interpretasi fungsi *survival* indikator pencemaran air sungai di Surabaya tahun 2013 pada lokasi pengamatan ke-5, yaitu pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo. Diketahui  $\hat{\theta}(\mathbf{u}_5)$  adalah penaksir ML parameter model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo yang diberikan oleh persamaan (6.9), dan berdasarkan sifat invarian penaksir ML maka  $\hat{S}(y_{1,5}, y_{2,5}, y_{3,5} | \hat{\theta}(\mathbf{u}_5))$  adalah penaksir ML fungsi *survival* pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo, yaitu

$$\begin{aligned} \hat{S}((y_{1,5}, y_{2,5}, y_{3,5}), \mathbf{x}_5, \hat{\theta}(\mathbf{u}_5)) &= P(Y_1 > y_{1,5}, Y_2 > y_{2,5}, Y_3 > y_{3,5}) \\ &= \exp \left[ - \left( \hat{A}(\mathbf{u}_5) \right)^{0,7473} \right], \end{aligned} \quad (6.10)$$

dengan

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathbf{u}_5) &= y_1^{2,0810} \exp[1,2213 - 1,8361X_1 + 0,0036X_2 - 0,0431X_3 - 0,0308X_4] + \\ & y_2^{3,9663} \exp[4,5689 - 2,5544X_1 + 0,0019X_2 - 0,0469X_3 - 0,0118X_4] + \\ & y_3^{2,5503} \exp[13,3415 + 0,0019X_1 + 0,0010X_2 - 0,0855X_3 + 0,0135X_4]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Berdasarkan persamaan (6.6) dan (6.10), setiap kenaikan kovariat  $X_h$  sebesar 1 satuan dengan asumsi nilai kovariat lainnya tetap, maka prediksi rasio nilai fungsi *survival* pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo diberikan oleh

$$\begin{aligned}\hat{R}_S(X_{h.5}) &= \frac{\hat{S}((y_{1.5}, y_{2.5}, y_{3.5}), \mathbf{x}_5, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_5) | X_{h.5} + 1)}{\hat{S}((y_{1.5}, y_{2.5}, y_{3.5}), \mathbf{x}_5, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_5))} \\ &= \exp \left[ (\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_5))^{\hat{a}(\mathbf{u}_5)} - (\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_5) | X_{h.5} + 1)^{\hat{a}(\mathbf{u}_5)} \right],\end{aligned}\quad (6.12)$$

untuk  $h = 1, 2, 3, 4$ , dimana  $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_5)$  diberikan oleh persamaan (6.11) dan  $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_5 | X_{h.5} + 1)$  adalah nilai  $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_5)$  pada  $X_h = X_{h.5} + 1$  dengan nilai kovariat lainnya tetap.

Penghitungan prediksi rasio fungsi *survival* pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo setiap kenaikan kovariat (yang berpengaruh signifikan) sebesar 1 satuan dievaluasi pada level (nilai) respon dan kovariat berturut-turut adalah COD sebesar 85,418 mg/l; DO = 6,700 mg/l; PO<sub>4</sub> = 0,3294 mg/l; kecepatan aliran air adalah 1,00 m/dt; debit air adalah 2,00 l/dt; konsentrasi deterjen adalah 122,910 mg/l, dan TSS adalah 71,00 mg/l. Berdasarkan persamaan (6.12), hasil penghitungan prediksi rasio nilai fungsi *survival* pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo setiap kenaikan nilai kovariat sebesar satu satuan disajikan pada Tabel 6.21.

Tabel 6.21 Rasio Nilai Fungsi *Survival* pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo

Kovariat ( $X_h$ )	Parameter Regresi ( $\beta_{kh}(\mathbf{u}_5)$ )	$\hat{\beta}_{kh}(\mathbf{u}_5)$	Penaksir Koefisien Kovariat $\left( -\frac{\hat{\gamma}_k(\mathbf{u}_5)}{\hat{a}(\mathbf{u}_5)} \hat{\beta}_{kh}(\mathbf{u}_5) \right)$	$\hat{R}_S(X_{h.5})$
Kecepatan aliran air (*)	$\beta_{11}(\mathbf{u}_5)$	0,8824	-1,8361	2,6940
	$\beta_{21}(\mathbf{u}_5)$	0,6440	-2,5544	
	$\beta_{31}(\mathbf{u}_5)$	-0,0007	0,0019	
Debit air	$\beta_{12}(\mathbf{u}_5)$	-0,0017	0,0036	0,9967
	$\beta_{22}(\mathbf{u}_5)$	-0,0005	0,0019	
	$\beta_{32}(\mathbf{u}_5)$	-0,0004	0,0010	
Konsentrasi deterjen	$\beta_{13}(\mathbf{u}_5)$	0,0207	-0,0431	1,1206
	$\beta_{23}(\mathbf{u}_5)$	0,0118	-0,0469	
	$\beta_{33}(\mathbf{u}_5)$	0,0335	-0,0855	
TSS	$\beta_{14}(\mathbf{u}_5)$	0,0148	-0,0308	1,0066
	$\beta_{24}(\mathbf{u}_5)$	0,0030	-0,0118	
	$\beta_{34}(\mathbf{u}_5)$	-0,0053	0,0135	

Keterangan : (\*) menyatakan bahwa kecepatan aliran air tidak berpengaruh terhadap GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo.

Berdasarkan hasil penghitungan prediksi rasio pada Tabel 6.21 dan memperhatikan hasil pengujian parameter regresi secara parsial pada Tabel 6.18, interpretasi fungsi *survival* pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo pada level COD, DO dan PO<sub>4</sub> masing-masing 85,418 mg/l; 6,700 mg/l dan 0,3294 mg/l adalah sebagai berikut :

1. Penaksir koefisien kovariat debit air yang bersesuaian dengan parameter regresi  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{22}$  dan  $\beta_{32}$  masing-masing adalah 0,0036; 0,0019 dan 0,0010, memberikan nilai  $\hat{R}_s$  sebesar 0,9967. Interpretasinya adalah setiap kenaikan debit air sebesar 1 l/dt, peluang (resiko) pencemaran air Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo akan turun sebesar 0,33%, dengan asumsi selain debit air, nilai kovariat lainnya tetap.
2. Penaksir koefisien kovariat konsentrasi deterjen yang bersesuaian dengan parameter regresi  $\beta_{13}$ ,  $\beta_{23}$  dan  $\beta_{33}$  masing-masing adalah -0,0431; -0,0469 dan -0,0855, memberikan nilai  $\hat{R}_s$  sebesar 1,1206. Interpretasinya adalah setiap kenaikan konsentrasi deterjen sebesar 1 mg/l, peluang (resiko) pencemaran air Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo akan naik sebesar 12,06%, dengan asumsi selain konsentrasi deterjen, nilai kovariat lainnya tetap.
3. Penaksir koefisien kovariat TSS yang bersesuaian dengan parameter regresi  $\beta_{14}$ ,  $\beta_{24}$  dan  $\beta_{34}$  masing-masing adalah -0,0308; -0,0118 dan 0,0135, memberikan nilai  $\hat{R}_s$  sebesar 1,0066. Interpretasinya adalah setiap kenaikan TSS sebesar 1 mg/l, peluang (resiko) pencemaran air Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo akan naik sebesar 0,66%, dengan asumsi selain konsentrasi TSS, nilai kovariat lainnya tetap.



## BAB 7

### KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini membahas kesimpulan hasil-hasil yang diperoleh pada penaksiran parameter model RWM dan GWMWR, penentuan statistik uji, distribusi statistik uji dan daerah kritis pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak model RWM, penerapan model GWMWR pada data indikator pencemaran air dan saran yang berupa informasi untuk penelitian lanjutan.

#### 7.1. Kesimpulan

Kesimpulan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Berdasarkan hasil pembahasan model RMW dapat disimpulkan :
  - 1.1. Model RWM adalah model regresi yang dikembangkan dari distribusi Weibull multivariat, yaitu FKP distribusi Weibull multivariat dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam parameter regresi. Model RWM dengan  $m$ -variat dinyatakan dalam persamaan

$$f(y_1, y_2, \dots, y_m) = \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} (y_k)^{(\gamma_k/a)-1} \exp \left[ -\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x} \right] \right) A^{a-m} \exp[-A^a] \times \left( \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A^{(\ell-1)a} \right),$$

dengan

$$A = \sum_{k=1}^m (y_k)^{\frac{\gamma_k}{a}} \exp \left[ -\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x} \right]; \boldsymbol{\beta}_k = [\beta_{k0} \quad \beta_{k1} \quad \dots \quad \beta_{kp}]^T;$$

$$\mathbf{x} = [1 \quad X_1 \quad \dots \quad X_p]^T; C(m, \ell, a) = \sum_{\substack{\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m = \ell \\ \ell_1 + 2\ell_2 + \dots + m\ell_m = m \\ \ell_k \in \text{bulat non-negatif}}} P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}^m \prod_{k=1}^m \binom{a}{k}^{\ell_k},$$

dimana

$$P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}^m = \binom{m}{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m} = \frac{m!}{\ell_1! \ell_2! \dots \ell_m!} \quad \text{dengan } \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m\} \text{ adalah}$$

himpunan bilangan bulat non-negatif, solusi dari sistem persamaan

$$\sum_{k=1}^m \ell_k = \ell \quad \text{dan} \quad \sum_{k=1}^m k \ell_k = m.$$

Fungsi *survival* bersama distribusi Weibull multivariat yang memuat kovariat dinyatakan dalam persamaan

$$S(y_1, y_2, \dots, y_m) = \exp[-A^a], \text{ dengan } A = \sum_{k=1}^m (y_k)^{\frac{\gamma_k}{a}} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}\right].$$

- 1.2. Penaksir parameter model RWM diperoleh dengan metode *maximum likelihood estimation* (MLE), dimana bentuk eksplisit (*closed form*) penaksir *maximum likelihood* (ML) tidak dapat diperoleh secara analitikal. Hampiran penaksir ML parameter model RWM diperoleh secara numerik menggunakan metode iteratif Newton-Raphson. Elemen-elemen vektor gradien dan matriks Hessian berturut-turut dapat diperoleh dari turunan parsial orde pertama dan kedua dari fungsi *log-likelihood*. Vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  dapat dinyatakan

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \left[ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] = \sum_{q=1}^4 \mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}),$$

dengan

$$\mathbf{g}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left[ \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial a} \quad \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma}^T} \quad \frac{\partial L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right]^T,$$

dimana fungsi *log-likelihood* dapat dinyatakan

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^4 L_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}),$$

dengan

$$L_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left( \ln \gamma_k - \ln a + \left( \frac{\gamma_k}{a} - 1 \right) \ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i \right);$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (a - m) \ln A_i; \quad L_3(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = - \sum_{i=1}^n A_i^a; \quad L_4(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \ln Q_i;$$

$$A_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\gamma_k/a} \exp\left[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}_i\right] \text{ dan } Q_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a}.$$

Matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  dapat dinyatakan

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \left[ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] = \sum_{q=1}^4 \mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}),$$

dengan

$$\mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial a \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial a} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial a} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\gamma}^T} & \frac{\partial^2 L_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix},$$

dimana  $\mathbf{H}_q(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ ,  $q=1,2,3,4$  masing-masing adalah matriks simetri dengan orde  $1+m+m(p+1)$ .

- 1.3. Pengujian hipotesis parameter regresi model RWM terdiri dari pengujian secara serentak dan parsial. Statistik uji pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak adalah statistik Wilk's *likelihood ratio* yang diturunkan berdasarkan metode *likelihood ratio test* (LRT), yaitu

$$G_n = 2(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)),$$

dengan  $L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  adalah maksimum fungsi *log-likelihood* di bawah populasi.

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{q=1}^4 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \text{ dimana}$$

$$L_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left( \ln \hat{\gamma}_k - \ln \hat{a} + \left( \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{a}} - 1 \right) \ln y_{ki} - \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{a}} \hat{\boldsymbol{\beta}}_k^T \mathbf{x}_i \right);$$

$$L_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{i=1}^n (\hat{a} - m) \ln \hat{A}_i; \quad L_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = - \sum_{i=1}^n \hat{A}_i^{\hat{a}}; \quad L_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{i=1}^n \ln \hat{Q}_i,$$

dengan

$$\hat{A}_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\hat{\gamma}_k / \hat{a}} \exp \left[ - \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{a}} \hat{\boldsymbol{\beta}}_k^T \mathbf{x}_i \right]; \quad \hat{Q}_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, \hat{a}) \hat{A}_i^{(\ell-1)\hat{a}} \text{ dan}$$

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_2 & \cdots & X_p \end{bmatrix}^T.$$

$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)$  adalah maksimum fungsi *log-likelihood* di bawah  $H_0$ , dengan

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = \sum_{q=1}^4 L_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0), \text{ dimana}$$

$$L_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left( \ln \hat{\gamma}_{0k} - \ln \hat{a} + \left( \frac{\hat{\gamma}_{0k}}{\hat{a}_0} - 1 \right) \ln y_{ki} - \frac{\hat{\gamma}_{0k}}{\hat{a}_0} \hat{\beta}_{0k0} \right),$$

$$L_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = \sum_{i=1}^n (\hat{a}_0 - m) \ln \hat{A}_{0i} ; L_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = - \sum_{i=1}^n \hat{A}_{0i}^{\hat{a}_0} ;$$

$$L_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = \sum_{i=1}^n \ln \hat{Q}_{0i} ; \hat{A}_{0i} = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\hat{\gamma}_{0k}/\hat{a}_0} \exp \left[ - \frac{\hat{\gamma}_{0k}}{\hat{a}_0} \hat{\beta}_{0k0} \right] \text{ dan}$$

$$\hat{Q}_{0i} = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, \hat{a}_0) \hat{A}_{0i}^{(\ell-1)\hat{a}_0} .$$

Statistik  $G_n$  berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat bebas  $mp$ . Daerah kritis pengujian hipotesis parameter regresi model RWM secara serentak pada taraf uji  $\alpha$  adalah  $G_n > \chi_{(mp, \alpha)}^2$ .

2. Berdasarkan hasil pembahasan model GWMWR dapat disimpulkan :

2.1. Model GWMWR adalah model RWM dengan semua parameter bergantung pada lokasi geografis. Model GWMWR pada lokasi pengamatan ke- $i$  dengan koordinat  $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$  adalah

$$f(y_{1i}, \dots, y_{mi}) = \left( \prod_{k=1}^m \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} (y_{ki})^{(\gamma_k(\mathbf{u}_i)/a(\mathbf{u}_i))^{-1}} \exp \left[ - \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} (\mathbf{u}_i) \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i \right] \right) \times \\ \mathcal{A}_i^{a(\mathbf{u}_i)-m} \exp \left[ - \mathcal{A}_i^{a(\mathbf{u}_i)} \right] \left( \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a(\mathbf{u}_i)) \mathcal{A}_i^{(\ell-1)a(\mathbf{u}_i)} \right),$$

dengan

$$\mathcal{A}_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki})^{\gamma_k(\mathbf{u}_i)/a(\mathbf{u}_i)} \exp \left[ - \frac{\gamma_k(\mathbf{u}_i)}{a(\mathbf{u}_i)} \boldsymbol{\beta}_k^T(\mathbf{u}_i) \mathbf{x}_i \right].$$

2.2. Penaksiran parameter model GWMWR dilakukan secara lokal pada setiap lokasi pengamatan dan menggunakan pembobot spasial. Penaksiran parameter menggunakan metode MLE dan disimpulkan bahwa, bentuk eksplisit solusi persamaan *likelihood* untuk mendapatkan penaksir ML tidak dapat ditemukan secara analitikal. Metode alternatif dalam menyelesaikan persamaan *likelihood* untuk mendapatkan hampiran penaksir ML parameter model GWMWR adalah metode iteratif Newton-Raphson.

3. Hasil penghitungan penaksir ML parameter model RWM dan GWMWR pada setiap lokasi pengamatan berdasarkan algoritma Newton-Raphson masing-masing diperoleh penaksir ML yang konvergen.

4. Berdasarkan hasil dan pembahasan penerapan model RWM dan GWMWR pada data indikator pencemaran COD, DO dan PO<sub>4</sub> air sungai di Surabaya diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

4.1. Model RWM atau model global data indikator pencemaran air COD, DO dan PO<sub>4</sub> adalah

$$\begin{aligned} \hat{f}(y_1, y_2, y_3) = & 2,0277 y_1^{1,0277} \exp[2,0356 - 2,0830 X_1 + 0,0036 X_2 - 0,0438 X_3 - 0,0302 X_4] \times \\ & 3,5552 y_2^{2,5552} \exp[4,1080 - 2,3469 X_1 + 0,0022 X_2 - 0,0405 X_3 - 0,0140 X_4] \times \\ & 2,1406 y_3^{1,1406} \exp[11,5017 - 0,1703 X_1 + 0,0009 X_2 - 0,0711 X_3 + 0,0128 X_4] \times \\ & \hat{A}^{(-2,1988)} (0,1909 + 0,3828 \hat{A}^{0,8012} + 0,5144 \hat{A}^{1,6025}) \exp[-\hat{A}^{0,8012}], \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \hat{A} = & y_1^{2,0277} \exp[2,0356 - 2,0830 X_1 + 0,0036 X_2 - 0,0438 X_3 - 0,0302 X_4] + \\ & y_2^{3,5552} \exp[4,1080 - 2,3469 X_1 + 0,0022 X_2 - 0,0405 X_3 - 0,0140 X_4] + \\ & y_3^{2,1406} \exp[11,5017 - 0,1703 X_1 + 0,0009 X_2 - 0,0711 X_3 + 0,0128 X_4]. \end{aligned}$$

4.2. Penaksir ML fungsi *survival* (global) dengan kovariat adalah

$$\hat{S}(y_1, y_2, y_3) = \exp[-\hat{A}^{0,8012}]$$

dengan  $\hat{A}$  diberikan pada kesimpulan 4.1.

4.3. Berdasarkan nilai BIC dan AIC, model GWMWR lebih baik dari pada model RWM (model global) dalam pemodelan indikator pencemaran air COD, DO dan PO<sub>4</sub> pada air Sungai di Surabaya. Model GWMWR indikator pencemaran COD, DO dan PO<sub>4</sub> terbaik diperoleh dari hasil penaksiran parameter menggunakan fungsi pembobot Gauss adaptif. Model GWMWR terbaik dipilih dari hasil-hasil penaksiran parameter dengan pembobot spasial fungsi Gauss adaptif, *bi-square* adaptif dan *tricube* adaptif yang memberikan nilai BIC minimum. Model RWM atau model global data indikator pencemaran air COD, DO dan PO<sub>4</sub> diberikan pada kesimpulan 4.1 dan model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo adalah

$$\hat{f}(y_{1,5}, y_{2,5}, y_{3,5}) = \dots$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(y_{1,5}, y_{2,5}, y_{3,5}) = & 2,0810y_1^{1,0810} \exp[1,2213 - 1,8361X_1 + 0,0036X_2 - 0,0431X_3 - 0,0308X_4] \times \\ & 3,9663y_2^{2,9663} \exp[4,5689 - 2,5544X_1 + 0,0019X_2 - 0,0469X_3 - 0,0118X_4] \times \\ & 2,5503y_3^{1,5503} \exp[13,3415 + 0,0019X_1 + 0,0010X_2 - 0,0855X_3 + 0,0135X_4] \times \\ & [\hat{A}(\mathbf{u}_5)]^{-2,2527} \exp(-[\hat{A}(\mathbf{u}_5)]^{0,7473}) \times \\ & (0,2366 + 0,4234[\hat{A}(\mathbf{u}_5)]^{0,7473} + 0,4173[\hat{A}(\mathbf{u}_5)]^{1,4945}) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathbf{u}_5) = & y_1^{2,0810} \exp[1,2213 - 1,8361X_1 + 0,0036X_2 - 0,0431X_3 - 0,0308X_4] + \\ & y_2^{3,9663} \exp[4,5689 - 2,5544X_1 + 0,0019X_2 - 0,0469X_3 - 0,0118X_4] + \\ & y_3^{2,5503} \exp[13,3415 + 0,0019X_1 + 0,0010X_2 - 0,0855X_3 + 0,0135X_4]. \end{aligned}$$

Penaksir ML fungsi *survival* pada Kali Mas di Kebon Rojo adalah

$$\hat{S}(y_{1,14}, y_{2,14}, y_{3,14}) = \exp(-[\hat{A}(\mathbf{u}_5)]^{0,7473}).$$

5. Berdasarkan hasil pengujian hipotesis terhadap seluruh parameter regresi model GWMWR pada 9 lokasi pengamatan disimpulkan :
  - 5.1. Faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap model GWMWR pada Kali Mas di Jembatan Kebon Rojo adalah debit air, konsentrasi deterjen dan TSS.
  - 5.2. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Makmur di Lidah Kulon adalah kecepatan aliran air, debit air dan TSS,
  - 5.3. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model GWMWR pada Kali Surabaya di Kedurus, Kali Surabaya di Jembatan Wonokromo, Kali Mas di Jembatan Ngagel, Kali Mas di Jembatan Keputran Selatan, Saluran Darmo di Pompa air Darmo Kali dan Bozem Kedurus adalah kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen dan TSS.

## 7.2. Saran

Saran bagi peneliti yang membahas topik yang sama adalah :

1. Penentuan penaksir *maximum likelihood* parameter model RWM dan GWMWR dapat menggunakan algoritma EM sebagai metode alternatif.
2. Penerapan model GWMWR pada data riil disarankan mengambil sampel yang jarak antara dua titik sampel cukup jauh. Penghitungan jarak antara dua lokasi

pengamatan perlu dicoba berdasarkan panjang lintasan antara dua lokasi tersebut.

3. Penentuan lokasi titik sampel pengamatan disarankan secara acak dengan memperhatikan dimensi letak titik sampel misalnya jarak titik sampel dari tepi sungai dan kedalaman letak titik sampel dari permukaan air sungai.
4. Penerapan model RWM dan GWMWR disarankan pada data sampel yang cukup besar, dan data sampel bukan merupakan hasil pengamatan pengulangan.
5. Pengujian kesamaan model GWMWR (model lokal) dan model RWM (model global) sebaiknya dilakukan terhadap model GWMWR pada data riil.
6. Berdasarkan hasil pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR, terdapat kovariat yang berpengaruh secara global, sehingga perlu pengembangan dari model GWMWR ke model *Mixed* GWMWR.
7. Berdasarkan hasil penentuan faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap model GWMWR, pemerintah perlu memberikan penyuluhan kembali secara intensif kepada masyarakat di daerah aliran sungai tentang bahaya membuang sampah rumah tangga (industri), kotoran hewan dan manusia ke dalam aliran air sungai bagi kesehatan manusia. Sampah rumah tangga atau industri, kotoran hewan dan manusia dalam air sungai dapat meningkatkan konsentrasi deterjen dan TSS yang menyebabkan peluang pencemaran air sungai meningkat.
8. Pemerintah disarankan melakukan pengerukan sungai atau badan air yang mengalami pendangkalan agar dapat meningkatkan debit air sungai. Peningkatan debit air sungai dapat menurunkan peluang pencemaran air sungai.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)



## DAFTAR PUSTAKA

- Achmad, R. (2004), *Kimia Lingkungan*, Penerbit Andi Yogyakarta, ISBN 979-731 485-5.
- Al-Fauzan, M.A. (2000), "Methods for Estimating the Parameters of the Weibull Distribution", *Paper from King Abdulaziz City for Science and Technology Riyadh* 11442, Saudi Arabia.
- Amsyari, F. (1996), *Membangun Lingkungan Sehat*, Airlangga University Press, Surabaya, ISBN 979-8007-88-3.
- Anonim, (2013), *Laporan Kegiatan Pengawasan dan Pengendalian Dampak Lingkungan Tahun 2013*, Bidang Pengawasan Dampak Lingkungan Badan Lingkungan Hidup Kota Surabaya.
- Ata, N. dan Sozer, M.T. (2007), "Cox Regression Models with Nonproportional Hazard Applied to Lung Cancer Survival Data", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Vol. 36 (2) (2007), 157-167.
- Atkinson, P.M., German, S.E., Sear, D.A. dan Clark, M.J. (2003), "Exploring the Relations Between Riverbank Erosion and Geomorphological Controls Using Geographically Weighted Logistic Regression", *Geographical Analysis*, Vol. 35, No. 1, *The Ohio State University*.
- Bhat, B.R. (1981), *Modern Probability Theory*, John Willey & Sons, New York.
- Carlin, J. dan Haslett, J. (1982), "The Probability Distribution of Wind Power From a Dispersed Array of Wind Turbine Generators", *Journal of Applied Meteorology*, Vol. 21, pp. 303-313.
- Cleveland, W.S. (1979), "Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots", *Journal of The American Statistical Association* 74: 829-36.
- Conradsen, K. dan Nielsen, L.B. (1984), "Review of Weibull Statistics for Estimation of Wind Speed Distribution", *Journal of Climate and Applied Meteorology*, Vol. 23.
- Craven, P. Dan Wahba, G. (1979), "Smoothing Noisy Data with Spline Functions. Estimating the Correct Degree of Smoothing by the Method of Generalized Cross-Validation", *Numer. Math.* 31, 377-403.
- Dudewicz, E.J. dan Mishra, S.N. (1988), *Modern Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- Fardiaz, S. (1992), *Polusi Air & Udara*, Penerbit Kanisius, Jogjakarta.
- Freund, J.E. (1961), "A Bivariate Extension of the Exponential Distribution", dalam "Weibull Extension of a Bivariate Exponential Regression Model", eds. Hanagal, D.D., *Economic Quality Control*, Vol. 20, No. 2, 149 -; ©Helderman Verlag ISSN 0940-5151.
- Flores, A.Q. (2010), "Testing Copula Functions as a Method to Derive Bivariate Weibull Distribution", *Paper from Wilf Family Department of Politics New York University*, 2010.

- Fotheringham, A.S., Brundson, C. dan Charlton, M. (2002), *Geographically Weighted Regression: The Analysis of Spatially Varying Relationships*, John Wiley & Sons Ltd, England.
- Gupta, A.K., dan Nagar, D.K. (2000), *Matrix Variate Distributions*. Chapman & Hall/CRC, Florida.
- Hanagal, D.D. (1996), "A Multivariate Weibull Distribution", dalam *The Weibull Distribution A Handbook*, eds. Rinne, H., CRC Press Taylor and Francis Group, New York.
- Hanagal, D.D. (2004), "Parametric Bivariate Regression Analysis Based on Censored Samples : A Weibull Model", *Economic Quality Control*, Vol 19, No. 1, 1 -; ©Heldermann Verlag ISSN 0940-5151.
- Hanagal, D.D. (2005), "A Bivariate Weibull Regression Model", *Economic Quality Control*, Vol 20, No. 1, 1 -; ©Heldermann Verlag ISSN 0940-5151.
- Hanagal, D.D. (2005), "Weibull Extension of a Bivariate Exponential Regression Model", *Economic Quality Control*, Vol 20, No. 2, 149 -; ©Heldermann Verlag ISSN 0940-5151.
- Hanagal, D.D. (2006), "Weibull Extension of Bivariate Exponential Regression Model with Gamma Frailty for Survival Data", *Economic Quality Control*, Vol. 21 (2006), No. 2, 261-270.
- Han, Y. (2006), *Location-Scale Bivariate Weibull Distribution For Bivariate lifetime Modeling*, Thesis Master of Science Auburn University.
- Harini, S., Purhadi, Mashuri, M. dan Sunaryo, S. (2010), "Linear Model Parameter Estimator Of Spatial Multivariate Using Restricted Maximum Likelihood Estimation", *Journal of Mathematics And Technology*, Vol. 4 Oktober 2010 , 56, Baku Azerbaijan, ISSN 2078-0257.
- Harini, S., Purhadi, Mashuri, M. dan Sunaryo, S. (2012), "Statistical Test for Multivariate Geographically Weighted Regression Model Using the Method of Maximum Likelihood Ratio Test", *International Journal of Applied Mathematics & Statistics*, Vol. 29, (2012), 110-115, Ceser Publications, ISSN 0973-7545.
- Hidayanti, F., Purhadi dan Latra, I.N. (2015), "Parameter Estimation of Bivariate Weibull Regression", *Proceedings of The 5<sup>th</sup> Annual Basic Science International Conference 2015*, Malang, Indonesia, Vol. 5, ISSN : 2338-0128.
- Hidayanti, F. (2015), *Pemodelan Bivariate Weibull Regression Pada Pencemaran Air Sungai Di Surabaya*, Tesis Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Hogg, R.V. dan Craig, A.T. (1995), *Introduction to Mathematical Statistics*, Fifth Edition, Prentice Hall, Inc, New Jersey.
- Hosmer, D.W., Lemeshow, S., dan May, S. (2008), *Applied Survival Analysis. Regression Modeling of Time-to-Event Data*, Second Edition, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

- Hougaard, P. (1986), "Survival Models for Heterogeneous Populations Derived from Stable Distributions", dalam *The Weibull Distribution A Handbook*, eds. Rinne, H., CRC Press Taylor and Francis Group, New York.
- Justel, A., Pena, D. dan Zamar, R. (1997), "A multivariate Kolmogorov-Smirnov Test of Goodness of Fit", *Statistics & Probability Letters*, (35), 251-259.
- Khaulasari, H. (2014), *Pemodelan Mixed Geographically Weighted Regression Multivariate Pada Pencemaran Kualitas Air Chemical Oxygen Demand (COD) dan Biological Oxygen Demand (BOD) di Kali Surabaya*, Thesis Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Khuri, A.I. (2003), *Advanced Calculus with Applications in Statistics*, 2<sup>nd</sup> Edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Lawless, J. F. (2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Lee, C.K. dan Wen, M.J. (2009), "A Multivariate Weibull Distribution", *Journal Pak.j.stat.oper.res*, Vol. V, No. 2, 55-66.
- Lee, J.D. dan Lee, C.K. (2008), "Semi-competing Risks on A Trivariate Weibull Survival Model", *Journal Pak.j.stat.oper.res*, Vol. 4, No. 2, 77-82.
- Lee, L. (1979), "Multivariate Distribution Having Weibull Properties", dalam *The Weibull Distribution A Handbook*, eds. Rinne, H., CRC Press Taylor and Francis Group, New York.
- Lei, Y. (2008), "Evaluation of Three Methods for Estimating the Weibull Distribution Parameters of Chinese Pine (*Pinus tabulaeformis*)". *Journal of Forest Science*, 54, 2008 (12), 566-571.
- Leung, Y., Mei, C.L. dan Zhang, W.X. (2000), "Statistical Test for Spatial Non-Stationarity Based on the Geographically Weighted Regression Model", *Environment and Planning A*, 32, 9-32.
- Lin, D.Y. (1994), "Cox Regression Analysis Of Multivariate Failure Time Data : The Marginal Approach", *Journal Statistics in Medicine*, Vol.13, 2233-2247.
- Lu, J.C. (1989), "Weibull Extensions on the Freund and Marshall-Olkin Bivariate Exponential Models", dalam *The Weibull Distribution A Handbook*, eds. Rinne, H., CRC Press Taylor and Francis Group, New York.
- Lu, J. C. dan Bhattacharyya, G. K. (1990), "Some New Constructions of Bivariate Weibull Models", *Ann Inst. Statist. Math.* Vol. 42, No. 3, 543-559.
- Marshall, A.W. dan Olkin, I. (1967), "A multivariate Exponential Distribution", dalam "Parametric Bivariate Regression Analysis Based on Censored Samples : A Weibull Model", eds. Hanagal, D.D., *Economic Quality Control*, Vol 19, No. 1, 1 -; ©Heldermann Verlag, ISSN 0940-5151.
- Mouatassim, Y., Ezzahid, E. H. (2012), "Poisson Regression and Zero-inflated Poisson regression: Application to Private Health Insurance Data", *European Actuarial Journal*, Springer, ISSN 2190-9733.
- Nakaya, T. (2001), "Local Spatial Interaction Modelling Based on the Geographically Weighted Regression Approach", *Geojournal*, 53, 347-358.

- Nakaya, T., Fotheringham, A. S., Brunsdon, C. dan Charlton, M. (2005), "Geographically Weighted Poisson Regression for Disease Association Mapping", *Statist. Med.* (2005), 24, 2695-2717.
- O'Quigley, J. (2008), *Proportional Hazard Regression*, Springer Science+Business Media, LLC, New York.
- O'Quigley, J. dan Roberts, A. (1980), "Weibull: A Regression Model For Survival Time Studies", *Computer Program in Biomedicine* 12, 14-18.
- Pawitan, Y. (2001), *In All Likelihood. Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*, Clarendon Press-Oxford, New York.
- Purhadi dan Yasin, H. (2012), "Mixed Geographically Weighted Regression Model (Case Study: The Percentage of Poor Households in Mojokerto 2008)", *European Journal of Scientific Research*, Vol. 69., No. 2., (2012): 188-196. ©Eurojournals Publishing Inc. 2012, ISSN 1450-216X.
- Quraisy, A. dan Purhadi (2012), "Hypothesis Testing In Regression Model Bivariate Weibull", *Proceeding International Conference on Mathematics, Statistics and Its Applications* 2012, ISSN 978-979-96152-7-5.
- Rencher, A.C. (2000), *Linear Model in Statistics*, John Wiley & Sons, Inc, New York.
- Rencher, A.C. (2002), *Methods of Multivariate Analysis*, Sccond Edition, John Wiley & Sons, New York.
- Rinne, H. (2009), *The Weibull Distribution A Handbook*, CRC Press Taylor and Francis Group, New York.
- Ryan, T.P. (1996), *Modern Regression Methods*, John Wiley and Sons, Inc, New York.
- Santoso, F. P. dan Purhadi (2015), "Parameter Estimation of Geographically Weighted Univariate Weibull Regression (GWUWR)", *Proceedings of The 5<sup>th</sup> Annual Basic Science International Conference* 2015, Malang, Indonesia, Vol. 5, ISSN: 2338-0128.
- Sastrawijaya, A.T. (2009), *Pencemaran Lingkungan*, Penerbit Rineka Cipta, Jakarta, ISBN 978-979-518-209-2.
- Serfling, R. J. (1980), *Appoximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York, ISBN 0-471-21927-4.
- Slamet, J.S. (2004), *Kesehatan Lingkungan*, Gajah Mada University Press, Yoyakarta, ISBN 979-420-309-2.
- Spurrier, J.D. dan Weier, D.R. (1981), "Bivariate Survival Model Derived from A Weibull distribution", dalam *The Weibull Distribution A Handbook*, eds. Rinne, H., CRC Press Taylor and Francis Group, New York.
- Triyanto, Purhadi, Otok, B.W. dan Purnami, S.W. (2015) , "Parameter Estimation of Geographically Weighted Multivariate Poisson Regression", *Applied Mathematical Sciences*, (9), 4081-4093.

- Ulgen, K. dan Hepbasli, A. (2002), "Determination of Weibull Parameters for Wind Energy Analysis of Izmir, Turkey", *International Journal of Energy Research*, 26, (2002), 495-506.
- Voung, Q. H. (1989), "Likelihood Ratio Test for Selection and Non-Nested Hypothesis", *Econometrica*, Vol. 57, 307-333.
- Wahyudi, I., Purhadi, Irhamah dan Sutikno. (2011), "The Development of Parameter Estimation on Hazard Rate of Trivariate Weibull Distribution". *American Journal of Biostatistics* 2011, 2 (2) 26-35.
- Wahyudi, I. (2014), *Model Regresi Cox Multivariat Weibull, Studi Kasus: Model Hazard Penderita Demam Berdarah Dengue di Rumah Sakit Umum Haji Surabaya*. Disertasi-SS093303, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Wilks, D.S. (1989), "Rainfall Intensity, the Weibull Distribution, and Estimation of Daily Surface Runoff", *Journal of Applied Meteorology*, 1989, Vol. 28, 52-58.
- Wong, R.K. W. (1977), "Weibull Distribution, Iterative Likelihood Techniques and Hydrometeorology Data", *Journal of applied Meteorology*, 1977, Vol. 16, 1360-1364.
- Yan, X. dan Su, X. G. (2009), *Linear Regression Analysis, Theory and Computing*, World Scientific Publishing, Singapore, ISBN-13 : 978-981-283-410-2.
- Zhang, L., Gove, J.H. dan Heath, L.S. (2005), "Spatial Residual Analysis of Six Modeling Techniques", *Ecological Modelling* 186, 154-177.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

## DAFTAR RIWAYAT HIDUP

### A. Data Pribadi



1. Nama : Suyitno
2. Jenis Kelamin : Pria
3. Tempat, tgl lahir : Tulungagung, 15-11-1964
4. Alamat : Jl. Sejahtera I, Gg. Usaha  
No. 25, Rt. 01, Samarinda
5. Instansi : Prodi Statistika, FMIPA Unmul  
Samarinda
6. Email : suyitno.stat.unmul@gmail.com

### B. Latar Belakang Pendidikan

No	Nama Pendidikan	Jurusan/Bidang	Tahun Lulus
1	SD Negeri 1 Bangunmulyo, Tulungagung	-	1977
2	SMP Negeri Campurdarat	-	1981
3	SMPP Negeri Tulungagung	IPA	1984
4	Sarjana (S1) Universitas Terbuka Jakarta	Pendidikan Matematika	1995
5	Pra Pascasarjana ITS Surabaya	Statistika/Matematika	1999
6	Industrial Mathematics Universitas Kaiserslautern Jerman (Master of Science)	Mathematics/Industrial Mathematics	2001

### C. Publikasi

No	Judul	Publikasi
1	Multivariate Weibull Regression Model, 2017	Jurnal Internasional Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), Vol. 101, No. 9, 2017, 1977 - 1992.
2	Parameter Estimation of Geographically Weighted Trivariat Weibull Regression Model, 2016	Jurnal Internasional Applied Mathematical Sciences, Vol. 10, 2016, No. 18, 861-878.
3	Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull Bivariat, 2016	Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (Sendika) 2016, UM Purworejo, Vol. 2, No. 1/ 2016. ISSN: 2459-962X
4	Geographically Weighted Multivariate Weibull Regression Model, 2014	Proceedings International Conference on Statistics and Mathematics 2014, ITS Surabaya. ISSN : 2460-0237

No	Judul	Publikasi
5	Model Regresi Weibull Trivariat ( <i>Trivariate Weibull Regression</i> ), 2013	Prosiding Seminar Nasional Pasca Sarjana XIII 2013, ITS ISBN : 978-979-96700-9

#### D. SEMINAR ILMIAH

1. Seminar Nasional Pascasarjana XIII, 2013 di ITS Surabaya. Model Regresi Weibull Trivariat (*Trivariate Weibull Regression*).
2. Seminar Internasional pada International Conference on Statistics and Mathematics 2014 di ITS Surabaya. *Geographically Weighted Multivariate Weibull Regression Model*.
3. Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (SENDIKA), 2016 di Universitas Muhammadiyah Purworejo. Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull Bivariat.

Surabaya, Mei 2017,

Suyitno  
NRP. 1312301003



## LAMPIRAN

### Lampiran 1

Struktur data sampel respon (COD, DO, PO<sub>4</sub>) dan data sampel kovariat

No	COD (mg/l)	DO (mg/l)	Konsentrasi PO <sub>4</sub> (mg/l)	Kecepatan Aliran Air (m/dt)	Debit Air (l/dt)	Konsentrasi Deterjen (mg/l)	TSS (mg/l)
1	15,342	2,40	0,3519	1,42	10,65	127,000	8
2	93,671	6,30	0,2332	2,51	724,30	131,000	64
3	91,462	6,40	0,0928	2,45	98,92	91,462	61
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
26	23,104	1,40	0,4906	2,86	1087,61	124,000	1
27	16,5230	2,70	0,1352	1,76	5,76	123,000	5

Sumber : Laporan Kegiatan Pengawasan dan Pengendalian Dampak Lingkungan Tahun 2013, Bidang Pengawasan Dampak Lingkungan BLH Kota Surabaya.

Data sampel respon adalah COD, DO dan konsentrasi PO<sub>4</sub>, sedangkan data peubah bebas atau kovariat adalah kecepatan aliran air, debit air, konsentrasi deterjen, dan data TSS.

## Lampiran 2

a. Output statistik deskriptif data respon menggunakan program Minitab 16.

### Descriptive Statistics: Y1; Y2; Y3

Variable	N	Mean	StDev	CoefVar	Minimum	Maximum	Range
Y1	27	35,79	34,42	96,18	10,05	99,41	89,36
Y2	27	4,137	1,846	44,62	0,800	6,700	5,900
Y3	27	0,2544	0,2467	96,99	0,0382	1,3689	1,3307

b. Output statistik deskriptif data kovariat menggunakan program Minitab 16.

### Descriptive Statistics: X1; X2; X3; X4

Variable	N	Mean	StDev	CoefVar	Minimum	Maximum	Range
X1	27	2,1215	0,4829	22,76	1,3100	2,8600	1,5500
X2	27	321,3	395,7	123,14	5,7	1087,6	1081,9
X3	27	122,46	12,64	10,32	91,46	144,00	52,54
X4	27	15,48	21,69	140,07	1,00	71,00	70,00

c. Output nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) pada pendeteksian multikolinieritas data kovariat dengan menggunakan program Matlab 7.8.0.

Nilai VIF pada Uji Multikolinieritas Antar Kovariat

VIF_X1	VIF_X2	VIF_X3	VIF_X4
3.0844	3.0503	1.2323	1.0783

Ket: X1=Kecep. Aliran Air; X2=Debit Air; X3=Konsentrasi Deterjen; X4=TSS

d. Output nilai koefisien korelasi Pearson antar kovariat dengan menggunakan program Minitab 16:

### Correlations: X1; X2; X3; X4

	X1	X2	X3
X2	0,766 0,000		
X3	-0,126 0,531	0,162 0,418	
X4	0,146 0,467	-0,015 0,941	0,003 0,988

Cell Contents: Pearson correlation  
P-Value

### Lampiran 3

a. Output pengujian matriks korelasi antar respon dengan program Matlab 7.8.0.

Matriks Korelasi Antar Respon Y1, Y2, Y3

```
=====
R =
    1.0000    0.6074    0.3599
    0.6074    1.0000    0.1840
    0.3599    0.1840    1.0000
=====
```

Nilai Statistik T dan T\_Tabel Pada Uji Korelasi Antar Respon

```
=====
T      db      alfa      T_Tabel      Kesimpulan_Uji
352.1256  5.000  0.050  11.070          1
=====
Keterangan: 0 = Gagal menolak H0; 1 = Menolak H0
```

b. Tahapan pengujian distribusi data sampel respon  $(Y_1, Y_2, Y_3)$  dengan uji Kolmogorov-Smirnov multivariat

Tahap awal pengujian distribusi adalah penaksiran parameter distribusi populasi. Output nilai penaksir parameter distribusi Weibull trivariat dengan menggunakan program Matlab versi 7.8.0 adalah sebagai berikut :

Parameter Distribusi Weibull Trivariat

```
=====
a      gm1      gm2      gm3      lm1      lm2      lm3
0.71824  1.13525  2.29720  1.24857  36.09259  4.59041  0.27708
=====
```

Prosedur penghitungan statistik uji pada pengujian distribusi multivariat dengan metode Kolmogorov-Smirnov berdasarkan teori pada sub-bab 2.7, adalah sebagai berikut :

Statistik uji adalah  $D_n = \max_{j^*=1,2,\dots,6} (D_n^{j^*})$  dengan  $D_n^{j^*} = \sup(d^{j^*})$ . Statistik  $d^{j^*}$

didefinisikan oleh  $d^{j^*} = |G_n(\tilde{y}_1^{j^*}, \tilde{y}_2^{j^*}, \tilde{y}_3^{j^*}) - \tilde{y}_1^{j^*} \tilde{y}_2^{j^*} \tilde{y}_3^{j^*}|$  dengan  $(Y_1^{j^*}, Y_2^{j^*}, Y_3^{j^*})$

untuk  $j^*=1,2,\dots,6$  adalah permutasi ke- $j^*$  dari variabel  $(Y_1, Y_2, Y_3)$  dimana

$$\tilde{y}_1^{j^*} = F(y_1^{j^*}); \quad \tilde{y}_2^{j^*} = F(y_2^{j^*} | y_1^{j^*}) = \frac{F(y_1^{j^*}, y_2^{j^*})}{F(y_1^{j^*})} \text{ dan}$$

$$\tilde{y}_3^{j^*} = F(y_3^{j^*} | y_1^{j^*}, y_2^{j^*}) = \frac{F(y_1^{j^*}, y_2^{j^*}, y_3^{j^*})}{F(y_1^{j^*}, y_2^{j^*})}.$$

### Lampiran 3 (Lanjutan)

Fungsi distribusi kumulatif teoritis diberikan oleh

$$F(y_1^{j*}, y_2^{j*}, y_3^{j*}) = F(y_1^{j*})F(y_2^{j*} | y_1^{j*})F(y_3^{j*} | y_1^{j*}, y_2^{j*}) = \tilde{y}_1^{j*} \tilde{y}_2^{j*} \tilde{y}_3^{j*}.$$

Untuk setiap  $(\tilde{y}_{1i}^{j*}, \tilde{y}_{2i}^{j*}, \tilde{y}_{3i}^{j*}), i=1, 2, \dots, n$ , fungsi distribusi kumulatif empiris

didefinisikan  $G_n(\tilde{y}_{1i}^{j*}, \tilde{y}_{2i}^{j*}, \tilde{y}_{3i}^{j*}) = \frac{1}{n} \sum_j 1; \tilde{y}_{1j}^{j*} \leq \tilde{y}_{1i}^{j*}, \tilde{y}_{2j}^{j*} \leq \tilde{y}_{2i}^{j*}, \tilde{y}_{3j}^{j*} \leq \tilde{y}_{3i}^{j*}$  untuk

$j=1, 2, \dots, n$  dan  $j^*=1, 2, \dots, 6$ .

Fungsi distribusi kumulatif dihitung menggunakan hubungan (2.35) yakni

$$F(y_1, y_2, y_3) = 1 - S(y_1) - S(y_2) - S(y_3) + S(y_1, y_2) + S(y_1, y_3) + S(y_2, y_3) - S(y_1, y_2, y_3)$$

Berikut ini disajikan output penaksir parameter distribusi Weibull univariat, bivariat dan trivariat berdasarkan hasil penghitungan dengan program Matlab 7.8.0 :

(1) Parameter  $S(y_1)$  :

Model fungsi survival untuk respon  $Y_1$  adalah  $S(y_1) = \exp\left(-\left[\frac{y_1}{\lambda_1}\right]^{\eta_1}\right)$  dan fungsi distribusi kumulatif dihitung menggunakan hubungan  $F(y_1) = 1 - S(y_1)$ .

Dengan cara serupa dapat diperoleh fungsi kumulatif untuk  $F(y_2)$  dan  $F(y_3)$ .

```
Parameter Distribusi Weibull Univariat S(y1)
=====
gm1          lm1
1.153709354131541    37.914486447342668
=====
```

(2) Parameter  $S(y_2)$  :

```
Parameter Distribusi Weibull Univariat S(y2)
=====
Gm2          lm2
2.503776756286902    4.670508958787973
=====
```

(3) Parameter  $S(y_3)$  :

```
Parameter Distribusi Weibull Univariat S(y3)
=====
gm3          lm3
1.303764071751314    0.278890524785416
=====
```

### Lampiran 3 (Lanjutan)

(4) Parameter  $S(y_1, y_2)$  :

Fungsi survival bersama dan fungsi distribusi untuk respon  $Y_1$  dan  $Y_2$  masing-masing diperoleh berdasarkan persamaan (2.16) dan (2.18), yakni

$$S(y_1, y_2) = \exp \left( - \left[ \left( \frac{y_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{a}} + \left( \frac{y_2}{\lambda_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{a}} \right]^a \right) \text{ dan}$$

$F(y_1, y_2) = 1 - S(y_1) - S(y_2) + S(y_1, y_2)$ . Dengan cara serupa dapat diperoleh fungsi distribusi bersama  $F(y_1, y_3)$  dan  $F(y_2, y_3)$ .

```
Parameter Distribusi Weibull Bivariat S(y1,y2)
=====
a          gm1          gm2          lm1          lm2
0.7022387149 1.1684676401 2.3554631686 37.8326306046 4.5723053825
=====
```

(5) Parameter  $S(y_1, y_3)$  :

```
Parameter Distribusi Weibull Bivariat S(y1,y3)
=====
a          gm1          gm3          lm1          lm3
0.6944519368 1.1064693922 1.2637643977 36.5323836246 0.2788370501
=====
```

(6) Parameter  $S(y_2, y_3)$  :

```
Parameter Distribusi Weibull Bivariat S(y2,y3)
=====
a          gm2          gm3          lm2          lm3
0.9162288309 2.4556323464 1.3036412246 4.6446769270 0.2781197276
=====
```

(7) Parameter  $S(y_1, y_2, y_3)$  :

Berdasarkan persamaan (2.16), fungsi survival bersama distribusi Weibull trivariat adalah

$$S(y_1, y_2, y_3) = \exp \left( - \left[ \left( \frac{y_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{a}} + \left( \frac{y_2}{\lambda_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{a}} + \left( \frac{y_3}{\lambda_3} \right)^{\frac{\gamma_3}{a}} \right]^a \right), \text{ dan berdasarkan persamaan}$$

(2.18) diperoleh fungsi distribusi yaitu  $F(y_1, y_2, y_3) = 1 - S(y_1) - S(y_2) - S(y_3) + S(y_1, y_2) + S(y_1, y_3) + S(y_2, y_3) - S(y_1, y_2, y_3)$ .

### Lampiran 3 (Lanjutan)

Parameter Distribusi Weibull Trivariat

```
=====
a          gm1          gm2          gm3          lm1          lm2          lm3
0.71824    1.13525    2.29720    1.24857    36.09259    4.59041    0.27708
=====
```

Nilai statistik  $d^{j*}$  dan  $D_n^{j*}$  berdasarkan hasil perhitungan menggunakan program Matlab 7.8.0 adalah sebagai berikut:

Nilai d\_j Untuk j=1,2,...,6 Pada Pengujian Distribusi (Y1,Y2,Y3)

```
=====
d_j =
0.0048    0.0418    0.0048    0.0418    0.0418    0.0418
0.1454    0.1824    0.0713    0.1083    0.0028    0.1083
0.0814    0.0814    0.0814    0.0814    0.0073    0.0814
0.1345    0.1715    0.0234    0.0604    0.0878    0.0604
0.0384    0.0727    0.0384    0.1097    0.0384    0.1097
0.0056    0.0056    0.0056    0.0056    0.0056    0.0056
0.0223    0.0223    0.0223    0.0223    0.0223    0.0223
0.0618    0.0618    0.0618    0.0618    0.0618    0.0618
0.0188    0.0188    0.0188    0.0188    0.0188    0.0188
0.0386    0.0015    0.0386    0.0386    0.0015    0.0386
0.0603    0.0603    0.0603    0.0603    0.0603    0.0603
0.0322    0.0322    0.0322    0.0322    0.0693    0.0322
0.1365    0.1736    0.1365    0.0995    0.0116    0.0995
0.0979    0.0609    0.0609    0.0979    0.0979    0.0979
0.1663    0.0181    0.0552    0.2033    0.0552    0.2033
0.0136    0.0506    0.0136    0.0136    0.0506    0.0136
0.0119    0.0119    0.0119    0.0119    0.0119    0.0119
0.0097    0.0097    0.0273    0.0097    0.0097    0.0097
0.0467    0.0096    0.0467    0.0837    0.0837    0.0837
0.0650    0.0650    0.0650    0.0650    0.0650    0.0650
0.1670    0.2040    0.1670    0.0929    0.0182    0.0929
0.0217    0.0217    0.0217    0.0217    0.0217    0.0217
0.0856    0.0486    0.0856    0.0856    0.0856    0.0856
0.0541    0.0541    0.0541    0.0541    0.0541    0.0541
0.0081    0.0081    0.0660    0.0660    0.0290    0.0660
0.0011    0.0011    0.0011    0.0011    0.0011    0.0011
0.0227    0.0227    0.0227    0.0227    0.0227    0.0227
=====
```

```
Dn_j =
0.1670    0.2040    0.1670    0.2033    0.0979    0.2033
=====
```

```
Dn =
0.2040
```

Uji K-S Multivariat Untuk Distribusi (Y1,Y2,Y3)

```
=====
Dn      Dn_Kritis  Kesimpulan_Uji
0.2040   0.2416      0
=====
```

Ket: 0 = Gagal Menolak H0, 1 = Menolak H0

### Lampiran 3 (Lanjutan)

Berdasarkan hasil pengujian terhadap distribusi statistik  $D_n$  disimpulkan bahwa  $D_n \sim N(\mu, \sigma)$ ;  $\mu = 0,17375$  dan  $\sigma = 0,04125$ .  $Dn\_kritis$  adalah persentil ke-95 dari distribusi  $D_n$  yang dihitung dengan menggunakan simulasi Monte Carlo dengan 100000 replikasi dan didapat  $D_{n(0,95)} = 0,2431$ , sedangkan  $D_{n(0,95)}$  eksak adalah 0,2416. Simulasi Monte Carlo pada penentuan persentil distribusi  $D_n$  dibahas pada sub-bab 2.7.

Berikut ini adalah output Easyfit pada pengujian distribusi statistik  $D_n$ .

#### Goodness of Fit - Details [\[hide\]](#)

<b>Normal</b> [#41]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	6				
Statistic	0,26833				
P-Value	0,6925				
Rank	6				
$\alpha$	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Critical Value	0,41037	0,46799	0,51926	0,57741	0,61661
Reject?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Sample Size	6				
Statistic	0,63064				
Rank	8				
$\alpha$	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Critical Value	1,3749	1,9286	2,5018	3,2892	3,9074
Reject?	No	No	No	No	No

## Lampiran 4

- a. Ouput penghitungan vektor penaksir model RWM dengan metode MLE dengan program Matlab 7.8.0.

Penaksir Parameter a dan Parameter Bentuk Model RWM

```
=====
a          gm1          gm2          gm3
0.8012     1.6247     2.8486     1.7152
=====
```

Penaksir Vektor Parameter Regresi Model RWM-A

```
=====
Betha_Topi =

-1.0039    -1.1555    -5.3730
 1.0272     0.6601     0.0796
-0.0018    -0.0006    -0.0004
 0.0216     0.0114     0.0332
 0.0149     0.0039    -0.0060
=====
```

Nilai Statistik Z\_Kuadrat Penaksir Parameter Regresi Model RWM

```
=====
Z_Betha_Topi_Kuadrat =

 0.3289    1.0196    6.4384
 5.8929    5.1699    0.0234
11.9882    3.2910    0.4788
 4.8235    3.5014    8.7947
 8.0557    1.6033    1.4021
=====
```

Nilai Statistik G\_n dan G\_Tabel Pada Pengujian Serentak Model RWM

```
=====
Llmax    L0max    G_n    G_Tabel    Kesimpulan_Uji
-142.9498 -161.3719  36.8442  21.0300          1
=====
```

Ket: 0 = Gagal menolak H0, 1 = Menolak H0

Ukuran Kebaikan Model RWM

```
=====
nrm          BIC          AIC
0.0000000000000327  348.520402941341730  323.899502487259500
=====
```

Rasio Nilai Parameter Skala R\_Lm1, R\_Lm2 dan R\_Lm3

```
=====
R_Lm1 =
 2.7933    0.9982    1.0218    1.0150
R_Lm2 =
 1.9350    0.9994    1.0115    1.0040
R_Lm3 =
 1.0828    0.9996    1.0338    0.9941
=====
```



#### Lampiran 4 (Lanjutan)

Rasio Nilai FKP (R\_f) dan Fungsi Survival (R\_S)

=====

R\_f =

0.0688      1.0014      1.0065      0.9797

R\_S =

3.3799      0.9962      1.1223      1.0078

=====

#### b. Himpunan Parameter di bawah $H_0$ .

Penaksir Parameter a dan Parameter Bentuk Model RWM Di bawah  $H_0$

=====

a	gm1	gm2	gm3
0.7182	1.1353	2.2972	1.2486

=====

Penaksir Vektor Parameter Regresi Model RWM Di bawah  $H_0$

=====

Betha\_Topi =

3.5861      1.5240      -1.2834

=====

Nilai Statistik Z Penaksir Parameter Regresi Model RWM Di bawah  $H_0$

=====

Z\_Betha\_Topi =

20.4117      17.7275      -7.9732

=====

Ukuran Kebaikan Model RWM Di bawah  $H_0$

=====

nrm	BIC
0.0000000000000931	336.743740214837260

=====

#### c. Ouput pada pengujian heterogenitas spasial dengan program Matlab 7.8.0.

Pengujian Heterogenitas Spasial Terhadap RWT

=====

SSR	SSE	F	F_Kritis	Kesimpulan Uji
0.000000909651814	0.000001133083926	4.4155	2.8700	1.0000

=====

Ket: 0 = Gagal menolak  $H_0$ ; 1 = Menolak  $H_0$

## Lampiran 5

Output program Matlab 7.8.0, pada penaksiran parameter model GWMWR menggunakan fungsi pembobot spasial Gauss adaptif :

Penaksiran Parameter Model GWMWR

```
=====
nrmm_1 =

1.0e-012 *
0.1580  0.0210  0.2430  0.0633  0.1875  0.0662  0.0831  0.1058  0.0228
=====
```

Penaksir Vektor Parameter Model GWMWR

```
=====
Tetha_Topi_1_5 =

    0.7633    0.7202    2.7500    0.8012    0.7473
    1.6877    1.6196    2.3822    1.6247    1.5550
    2.9056    2.9503    4.0238    2.8487    2.9639
    1.6341    1.8035    2.8958    1.7152    1.9058
   -1.7843   -1.4077   -6.8008   -1.0039   -0.5869
    1.1697    1.0380    2.6063    1.0272    0.8824
   -0.0019   -0.0020   -0.0042   -0.0018   -0.0017
    0.0256    0.0251    0.0555    0.0216    0.0207
    0.0164    0.0164    0.0160    0.0149    0.0148
   -1.2816   -1.2497    1.5601   -1.1555   -1.1519
    0.6682    0.6495    0.2200    0.6601    0.6440
   -0.0005   -0.0004   -0.0006   -0.0006   -0.0005
    0.0119    0.0122    0.0002    0.0114    0.0118
    0.0043    0.0034    0.0056    0.0039    0.0030
   -5.9276   -5.7980    0.5078   -5.3731   -5.2313
    0.2120    0.1399   -1.4739    0.0796   -0.0007
   -0.0006   -0.0006    0.0014   -0.0004   -0.0004
    0.0356    0.0360    0.0142    0.0332    0.0335
   -0.0067   -0.0058   -0.0072   -0.0060   -0.0053
```

Tetha\_Topi\_6\_9 =

```
    0.7298    0.7774    0.8600    0.7316
    1.6021    1.6974    1.7271    1.6530
    2.9376    2.8820    2.7610    2.9282
    1.8230    1.6088    1.5489    1.7102
   -1.2001   -1.7562   -1.2750   -1.6749
    1.0038    1.1804    1.1530    1.1127
   -0.0019   -0.0019   -0.0018   -0.0020
    0.0239    0.0252    0.0217    0.0258
    0.0158    0.0162    0.0147    0.0166
   -1.2225   -1.2711   -1.2247   -1.3131
    0.6486    0.6678    0.6636    0.6672
   -0.0004   -0.0006   -0.0007   -0.0005
    0.0121    0.0118    0.0116    0.0123
    0.0033    0.0045    0.0057    0.0038
   -5.6657   -5.8855   -5.3787   -5.9554
    0.1077    0.2138    0.1582    0.1924
   -0.0005   -0.0006   -0.0004   -0.0006
    0.0354    0.0352    0.0319    0.0363
   -0.0057   -0.0069   -0.0074   -0.0062
=====
```

Nilai Statistik W\_kuadrat Penaksir Parameter Regresi Model GMMWR

=====

W\_Betha\_Topi\_Kuadrat\_1\_5 =

0.9092	0.5598	15.0839	0.3289	0.0669
6.3169	5.1825	21.2862	5.8926	2.6575
11.2178	10.8207	27.6457	11.9876	6.3416
5.7471	5.6390	24.7648	4.8235	2.7410
6.4787	7.5767	4.3503	8.0555	5.5671
0.9845	1.0380	1.0937	1.0195	0.6738
4.3153	4.5813	0.3004	5.1697	3.3420
1.9369	1.3358	1.6257	3.2905	1.2616
2.8943	3.5535	0.0010	3.5013	2.6470
1.1999	1.1059	1.2819	1.6032	0.8183
5.6779	7.3718	0.0429	6.4385	4.9556
0.1157	0.0710	6.8736	0.0234	0.0000
0.5991	0.8347	3.5545	0.4789	0.3709
7.1413	10.3452	1.4433	8.7950	7.6170
0.9917	1.2048	2.4303	1.4021	1.0850

W\_Betha\_Topi\_Kuadrat\_6\_9 =

0.3966	0.8514	0.3137	0.8250
4.7629	6.1694	4.1345	6.0210
10.1860	10.7936	7.4034	11.4614
5.0469	5.3592	2.8183	6.1054
7.3968	6.0551	3.9635	7.2422
0.9900	0.9303	0.6635	1.1114
4.5132	4.0986	2.8130	4.6727
1.4514	2.0664	2.4405	1.6139
3.5031	2.7082	1.9677	3.4024
1.1006	1.2206	1.1998	1.1403
7.1756	5.1787	2.7932	6.8953
0.0431	0.1083	0.0379	0.1163
0.7407	0.5283	0.2178	0.7736
10.2657	6.4180	3.3675	9.1134
1.2724	0.9653	0.7610	1.0793

=====

Nilai Bandwidth Model GMMWR

=====

Bandwidth =

0.0535	0.0530	0.0623	4.9736	0.0700	0.0591	0.0537	0.0713	0.0483
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

=====

Nilai Statistik VV0 dan Z\_Tabel Pada Pengujian Serentak Model GMMWR

=====

VV0	Z_Tabel	Kesimpulan_Uji
4.7038	1.9600	1.0000

=====

Ket: 0 = Gagal menolak Ho, 1 = Menolak H0

Nilai AIC dan BIC

=====

AIC	BIC
308.140908359580750	332.761808813662980

=====

Rasio Nilai FKP (R\_f) dan Fungsi Survival (R\_S)

=====

R_f =			
0.0729	1.0013	1.0056	0.9814

R_S =			
2.6940	0.9967	1.1206	1.0066

=====

# Jarak Euclidean

d =

0	0.0358	0.0409	0.0567	0.0849	0.0444	0.0076	0.0587	0.0188
0.0358	0	0.0050	0.0233	0.0567	0.0107	0.0415	0.0870	0.0191
0.0409	0.0050	0	0.0197	0.0538	0.0081	0.0465	0.0916	0.0241
0.0567	0.0233	0.0197	0	0.0345	0.0128	0.0609	0.0995	0.0381
0.0849	0.0567	0.0538	0.0345	0	0.0461	0.0870	0.1133	0.0666
0.0444	0.0107	0.0081	0.0128	0.0461	0	0.0491	0.0910	0.0262
0.0076	0.0415	0.0465	0.0609	0.0870	0.0491	0	0.0510	0.0230
0.0587	0.0870	0.0916	0.0995	0.1133	0.0910	0.0510	0	0.0683
0.0188	0.0191	0.0241	0.0381	0.0666	0.0262	0.0230	0.0683	0

# Pembobot Spasial menggunakan Fungsi Gauss Adaptif

W =

1.0000	0.7954	0.8064	0.9999	0.4793	0.7542	0.9899	0.7125	0.9273
0.7991	1.0000	0.9967	0.9999	0.7207	0.9839	0.7423	0.4750	0.9244
0.7472	0.9955	1.0000	0.9999	0.7440	0.9907	0.6875	0.4380	0.8831
0.5703	0.9075	0.9511	1.0000	0.8856	0.9768	0.5258	0.3776	0.7325
0.2837	0.5641	0.6881	0.9999	1.0000	0.7380	0.2689	0.2826	0.3864
0.7084	0.9799	0.9916	0.9999	0.8051	1.0000	0.6580	0.4426	0.8634
0.9898	0.7360	0.7567	0.9999	0.4618	0.7081	1.0000	0.7739	0.8929
0.5481	0.2597	0.3391	0.9998	0.2700	0.3062	0.6368	1.0000	0.3678
0.9404	0.9368	0.9280	0.9999	0.6364	0.9068	0.9125	0.6319	1.0000

## Lampiran 6

Output program Matlab 7.8.0, pada penaksiran parameter model GWMWR menggunakan fungsi pembobot spasial *Bi-square* adaptif :

```
Penaksiran Parameter Model GWMWR
=====
nrmm_1 =

1.0e-012 *
0.1805  0.0799  0.1602  0.1105  0.0988  0.0738  0.0539  0.0485  0.5161
=====

Penaksir Vektor Parameter Model GWMWR
=====

Tetha_Topi_1_5 =

    0.7704    0.7282    0.7290    0.8012    0.7521
    1.6716    1.6170    1.6099    1.6247    1.5703
    2.8629    2.9552    2.9597    2.8487    2.9462
    1.6512    1.7954    1.8106    1.7153    1.8594
   -1.6058   -1.3853   -1.3142   -1.0040   -0.7706
    1.1392    1.0436    1.0280    1.0272    0.9280
   -0.0019   -0.0019   -0.0019   -0.0018   -0.0018
    0.0248    0.0247    0.0244    0.0216    0.0214
    0.0159    0.0162    0.0161    0.0149    0.0150
   -1.2477   -1.2527   -1.2407   -1.1555   -1.1772
    0.6627    0.6562    0.6542    0.6601    0.6521
   -0.0006   -0.0005   -0.0004   -0.0006   -0.0005
    0.0118    0.0122    0.0121    0.0114    0.0118
    0.0042    0.0034    0.0033    0.0039    0.0031
   -5.8350   -5.7715   -5.7198   -5.3733   -5.3354
    0.1890    0.1364    0.1227    0.0796    0.0311
   -0.0005   -0.0005   -0.0005   -0.0004   -0.0004
    0.0353    0.0358    0.0356    0.0332    0.0338
   -0.0066   -0.0058   -0.0057   -0.0060   -0.0054

Tetha_Topi_6_9 =

    0.7349    0.7795    1.1971    0.7324
    1.6022    1.6818    1.8656    1.6525
    2.9490    2.8454    3.0565    2.9230
    1.8142    1.6282    1.7601    1.7127
   -1.2130   -1.6130   -1.9258   -1.6670
    1.0121    1.1514    1.2133    1.1144
   -0.0019   -0.0019   -0.0020   -0.0020
    0.0238    0.0246    0.0271    0.0258
    0.0158    0.0158    0.0164    0.0165
   -1.2322   -1.2476   -1.0687   -1.2990
    0.6552    0.6628    0.7047    0.6648
   -0.0005   -0.0006   -0.0009   -0.0005
    0.0121    0.0118    0.0101    0.0122
    0.0033    0.0044    0.0064    0.0038
   -5.6536   -5.8199   -5.7834   -5.9696
    0.1076    0.1946    0.1091    0.1951
   -0.0005   -0.0005   -0.0002   -0.0006
    0.0352    0.0350    0.0363    0.0364
   -0.0057   -0.0068   -0.0065   -0.0062
=====
```

Nilai Statistik W\_kuadrat Penaksir Parameter Regresi Model GMMWR  
=====

W\_Betha\_Topi\_Kuadrat\_1\_5 =

0.7716	0.5573	0.4931	0.3289	0.1345
6.3850	5.3815	5.1557	5.8916	3.3995
11.7656	11.0643	10.7562	11.9859	7.6755
5.6853	5.6340	5.4160	4.8235	3.3844
6.8729	7.6451	7.6015	8.0549	6.2600
0.9945	1.0750	1.0511	1.0195	0.7940
4.4964	4.8030	4.7508	5.1692	3.8691
2.1943	1.5217	1.5009	3.2890	1.5662
3.0584	3.6221	3.6073	3.5011	2.9545
1.2939	1.1427	1.1329	1.6027	0.9624
6.0854	7.4353	7.3655	6.4390	5.6012
0.1028	0.0688	0.0564	0.0234	0.0032
0.6182	0.8217	0.7984	0.4790	0.4403
7.8087	10.3701	10.3826	8.7960	8.3315
1.1282	1.2304	1.2455	1.4020	1.1610

W\_Betha\_Topi\_Kuadrat\_6\_9 =

0.4168	0.7582	0.7243	0.8294
4.9723	6.3041	4.3863	6.1484
10.4615	11.4507	9.0823	11.7659
5.1316	5.4473	4.7267	6.1894
7.5286	6.5249	4.3031	7.3241
1.0359	0.9585	0.6234	1.1054
4.7343	4.3067	3.4379	4.7258
1.6019	2.2668	3.7509	1.6467
3.5877	2.9070	2.0739	3.4233
1.1389	1.3030	1.4559	1.1497
7.2401	5.6526	3.5898	7.0788
0.0437	0.1010	0.0206	0.1224
0.7379	0.5647	0.0707	0.8102
10.2777	7.1560	5.1838	9.3675
1.2765	1.0903	0.6294	1.1179

Nilai Bandwidth Model GMMWR  
=====

Bandwidth =

0.1377 0.1275 0.1333 4.9736 0.1776 0.1382 0.1352 0.1603 0.1091  
=====

Nilai Statistik VV0 dan Z\_Tabel Pada Pengujian Serentak Model GMMWR  
=====

VV0	Z_Tabel	Kesimpulan_Uji
4.5180	1.9600	1.0000

Ket: 0 = Gagal menolak Ho, 1 = Menolak H0

Nilai AIC dan BIC  
=====

AIC	BIC
310.412594520666120	335.033494974748350

Pembobot Spasial menggunakan Fungsi Bi-square Adaptif

```
=====
W =

1.0000  0.8482  0.8209  0.9997  0.5947  0.8041  0.9936  0.7501  0.9418
0.8691  1.0000  0.9971  0.9999  0.8066  0.9881  0.8207  0.4982  0.9394
0.8316  0.9969  1.0000  0.9999  0.8245  0.9932  0.7774  0.4539  0.9051
0.6895  0.9341  0.9567  1.0000  0.9259  0.9829  0.6353  0.3783  0.7711
0.3837  0.6438  0.7001  0.9999  1.0000  0.7898  0.3427  0.2506  0.3941
0.8026  0.9861  0.9926  0.9999  0.8697  1.0000  0.7532  0.4595  0.8883
0.9938  0.7996  0.7713  0.9997  0.5770  0.7632  1.0000  0.8077  0.9133
0.6697  0.2859  0.2784  0.9992  0.3514  0.3210  0.7353  1.0000  0.3701
0.9632  0.9554  0.9358  0.9999  0.7386  0.9296  0.9430  0.6701  1.0000
=====
```

## Lampiran 7

Output program Matlab 7.8.0, pada penaksiran parameter model GWMWR menggunakan fungsi pembobot spasial *Tri-cube* adaptif :

```
Penaksiran Parameter Model GWMWR
=====
nrmm_1 =

1.0e-012 *
0.1522  0.1796  0.1314  0.0109  0.0878  0.0391  0.0176  0.1426  0.0655
=====

Penaksir Vektor Parameter Model GWMWR
=====

Tetha_Topi_1_5 =

    0.8012    0.7260    0.7289    0.8012    1.2257
    1.6247    1.6156    1.6078    1.6247    1.7948
    2.8486    2.9877    2.9939    2.8486    3.4468
    1.7152    1.8016    1.8129    1.7152    2.2039
   -1.0039   -1.4206   -1.3443   -1.0039   -1.6601
    1.0272    1.0563    1.0401    1.0272    1.1331
   -0.0018   -0.0020   -0.0019   -0.0018   -0.0022
    0.0216    0.0248    0.0244    0.0216    0.0272
    0.0149    0.0162    0.0161    0.0149    0.0165
   -1.1555   -1.2788   -1.2732   -1.1555   -0.7436
    0.6601    0.6655    0.6662    0.6601    0.6860
   -0.0006   -0.0004   -0.0005   -0.0006   -0.0007
    0.0114    0.0122    0.0122    0.0114    0.0085
    0.0039    0.0033    0.0033    0.0039    0.0036
   -5.3730   -5.7989   -5.7276   -5.3730   -4.6113
    0.0796    0.1419    0.1252    0.0796   -0.2286
   -0.0004   -0.0006   -0.0005   -0.0004   -0.0000
    0.0332    0.0359    0.0356    0.0332    0.0325
   -0.0060   -0.0057   -0.0056   -0.0060   -0.0049

Tetha_Topi_6_9 =

    0.7333    0.7784    0.8439    0.7331
    1.6005    1.6751    1.7504    1.6535
    2.9947    2.8086    2.7688    2.9171
    1.8199    1.6400    1.5199    1.7176
   -1.2586   -1.5223   -1.5294   -1.6698
    1.0228    1.1294    1.1998    1.1195
   -0.0019   -0.0019   -0.0019   -0.0020
    0.0239    0.0243    0.0229    0.0259
    0.0159    0.0157    0.0152    0.0163
   -1.2655   -1.2282   -1.2631   -1.2694
    0.6668    0.6547    0.6568    0.6592
   -0.0005   -0.0006   -0.0007   -0.0005
    0.0122    0.0118    0.0118    0.0121
    0.0033    0.0044    0.0061    0.0037
   -5.6505   -5.7889   -5.5467   -6.0192
    0.1079    0.1838    0.2020    0.2043
   -0.0005   -0.0005   -0.0005   -0.0006
    0.0352    0.0350    0.0325    0.0367
   -0.0055   -0.0068   -0.0081   -0.0063
=====
```



Nilai Statistik W\_kuadrat Penaksir Parameter Regresi Model GMMWR

=====

W\_Betha\_Topi\_Kuadrat\_1\_5 =

0.3289	0.5999	0.5318	0.3289	0.7011
5.8930	5.6370	5.4277	5.8929	5.2644
11.9882	11.4330	11.1073	11.9881	14.6302
4.8236	5.7883	5.5589	4.8235	6.3587
8.0557	7.7431	7.7526	8.0557	7.5210
1.0196	1.1612	1.1550	1.0196	0.3845
5.1699	5.1412	5.1485	5.1699	4.9141
3.2910	1.5780	1.6102	3.2909	4.1570
3.5013	3.7969	3.8113	3.5014	1.9668
1.6033	1.1468	1.1527	1.6033	1.4422
6.4384	7.7382	7.6226	6.4384	3.7589
0.0234	0.0770	0.0607	0.0234	0.1702
0.4788	0.9112	0.8601	0.4788	0.0017
8.7947	10.7238	10.6549	8.7948	7.3217
1.4021	1.2142	1.2276	1.4021	1.0979

W\_Betha\_Topi\_Kuadrat\_6\_9 =

0.4627	0.7181	0.4985	0.8672
5.2242	6.5243	4.7631	6.5026
10.7919	12.2575	8.0480	12.6074
5.3201	5.7080	3.4497	6.5022
7.7689	7.0572	4.1548	7.5872
1.1447	0.9856	0.7333	1.1013
5.1469	4.4583	2.9062	4.8767
1.6751	2.3836	2.2616	1.7114
3.8131	3.1069	2.0845	3.5016
1.1667	1.3864	1.2690	1.1749
7.4708	6.1391	3.0246	7.5717
0.0455	0.0996	0.0611	0.1420
0.7938	0.6108	0.2577	0.9168
10.5270	7.9108	3.5578	10.0446
1.2457	1.2281	0.8385	1.2102

=====

Nilai Bandwidth Model GMMWR

=====

Bandwidth =

4.2465	0.1173	0.1246	4.9736	0.1734	0.1267	0.1321	0.1478	0.1038
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

=====

Nilai Statistik VV0 dan Z\_Tabel Pada Pengujian Serentak Model GMMWR

=====

VV0	Z_Tabel	Kesimpulan_Uji
4.3183	1.9600	1.0000

=====

Ket: 0 = Gagal menolak Ho, 1 = Menolak H0

Nilai AIC dan BIC

=====

AIC	BIC
312.384734420605640	337.005634874687870

=====

Pembobot Spasial menggunakan Fungsi Tricube Adaptif

```
=====
W =
1.0000  0.9169  0.8981  0.9999  0.6871  0.8761  0.9994  0.8236  0.9824
0.9999  1.0000  0.9998  0.9999  0.8988  0.9982  0.9102  0.5046  0.9813
0.9999  0.9998  1.0000  0.9999  0.9128  0.9992  0.8749  0.4422  0.9630
0.9999  0.9766  0.9882  1.0000  0.9765  0.9969  0.7341  0.3355  0.8589
0.9999  0.6985  0.7771  0.9999  1.0000  0.8622  0.3642  0.1655  0.3988
0.9999  0.9978  0.9992  0.9999  0.9446  1.0000  0.8535  0.4502  0.9527
0.9999  0.8733  0.8522  0.9999  0.6662  0.8348  1.0000  0.8814  0.9678
0.9999  0.2082  0.2196  0.9999  0.3745  0.2492  0.8370  1.0000  0.3659
0.9999  0.9870  0.9786  0.9999  0.8395  0.9738  0.9843  0.7321  1.0000
=====
```

## Lampiran 8

Program Matlab pada penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model RWM

```
clc;
clear all;

%% Data Respon y %%
y=input('Masukkan Data Respon y = ');
y1=y(:,1); y2=y(:,2); y3=y(:,3);
n=length(y(:,1));

%% Data Respon X %%
X=input('Masukkan Data Kovariat X = ');
X0=ones(n,1); % Kovariat untuk Bt0 %
X=[X0,X];
X1=X(:,2); X2=X(:,3); X3=X(:,4); X4=X(:,5);
%% X1=Kecepatan Airan Air %%
%% X2=Debit Air %%
%% X3=Deterjen %%
%% X4=TSS %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

v1=length(X(1,:)); % banyaknya kovariat termasuk konstanta %
pr=4+3*v1; %%% banyaknya parameter%%

nr0=10^(-12); q0=35; % nr0 Toleransi norm dan q0 iterasi maximum %

%% Nilai Awal Parameter Skala Lamda (IM) %%
lm1=37;lm2=4.5;lm3=0.2;

%% Nilai Awal Parameter Bentuk(gm) %%
z1=1.6:0.1:2.0; z2=2.6:0.1:3.0; z3=1.6:0.1:2.0; z4=0.1:0.1:1.0;
m1=length(z1); m2=length(z2); m3=length(z3); m4=length(z4);

%% Proses Iterasi NR %%
For j1=1:m1
    gm10=z1(j1);
    for j2=1:m2
        gm20=z2(j2);
        for j3=1:m3
            gm30=z3(j3);
            for j4=1:m4
                a0=z4(j4)
                Bt10=zeros(v1,1); Bt20=zeros(v1,1);Bt30=zeros(v1,1);
                gm0=[gm10;gm20;gm30];
                thb=[a0;gm0;Bt10;Bt20;Bt30];
                thb(5)=log(lm1);thb(5+v1)=log(lm2);thb(5+2*v1)=log(lm3);
                %%%
                D=zeros(n,3); BtmLn=zeros(n,3); B=zeros(n,3); Bb=zeros(n,3);
                Bt1Xa=zeros(n,v1); Bt2Xa=zeros(n,v1); Bt3Xa=zeros(n,v1);
                Bt1X=zeros(n,1); Bt2X=zeros(n,1); Bt3X=zeros(n,1);
                %%%
            end
        end
    end
end

for q=1:q0
    q
    thl=thb;%% thl=tetha lama dan thb=tetha baru %%
    a=thl(1); gm=thl(2:4);Bt1=thl(5:4+v1); Bt2=thl(5+v1:4+2*v1);
    Bt3=thl(5+2*v1:pr);
```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

for k=1:3
    D(:,k)=y(:,k).^(gm(k)/a).*exp(-(gm(k)/a)*BtX(:,k));%%(4.33)%
    BtmLn(:,k)=BtX(:,k)-log(y(:,k)); %% BtX-ln(y)%%
    B(:,k)=D(:,k).*BtmLn(:,k); Bb(:,k)=D(:,k).*BtmLn(:,k).^2;
end

%% Menentukan vektor Gradien g1 %%
m=3; %% m adalah bamyaknya variat atau dimensi respon %%
g1=zeros(pr,1);
dL1dai=-(m/a)*ones(n,1)+(1/a^2)*(gm(1)*BtmLn(:,1)+
    gm(2)*BtmLn(:,2)+ gm(3)*BtmLn(:,3));
g1(1)=sum(dL1dai);
for k=1:3
    dL1dgm1=ones(n,1)/gm(k)-(1/a)*BtmLn(:,k);
    g1(k+1)=sum(dL1dgm1);
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        dL1dBti=-(gm(k)/a)*X(:,v);
        g1(4+(k-1)*v1+v)=sum(dL1dBti);
    end
end; g1

%% Menentukan vektor Gradien g2 %%
g2=zeros(pr,1);
A=D(:,1)+D(:,2)+D(:,3);
M=(1/a)*(gm(1)*B(:,1)+gm(2)*B(:,2)+gm(3)*B(:,3));
Mb=(1/a^2)*(gm(1)^2*Bb(:,1)+gm(2)^2*Bb(:,2)+gm(3)^2*Bb(:,3));

U=A.*log(A)+M;
dL2dai=(1/a)*(a*U-m*M).*A.^(-1);
dL2da=dL2dai ; g2(1)=sum(dL2da);
for k=1:3
    dL2dgmki=-((a-m)/a)*B(:,k).*A.^(-1);
    g2(k+1)=sum(dL2dgmki);
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        dL2dBti=-((a-m)/a)*gm(k)*D(:,k).*X(:,v).*A.^(-1);

        g2(4+(k-1)*v1+v)=sum(dL2dBti);
    end
end; g2;

%% Menentukan vektor Gradien g3 %%
g3=zeros(pr,1);
dL3dai=-U.*A.^(a-1); dL3da= dL3dai;
g3(1)=sum(dL3da);
for k=1:3
    dL3dgmki=B(:,k).*A.^(a-1);
    g3(k+1)=sum(dL3dgmki);
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        dL3dBti=gm(k)*D(:,k).*X(:,v).*(A.^(a-1));
        g3(4+(k-1)*v1+v)=sum(dL3dBti);
    end
end;
g3;

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

%% Menentukan vektor Gradien g4 %%

g4=zeros(pr,1);
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*A.^a+(a^3)*A.^(2*a);
K=3*((a-1)^2*ones(n,1)-a*(3*a-2)*A.^a+a^2*A.^(2*a))-ones(n,1);
P=2*a^3*A.^a-3*a^2*(a-1)*ones(n,1);
dQdai=K+P.*U.*A.^(a-1);
dL4dai=dQdai.*Q.^(-1); dL4da=bb.*dL4dai; g4(1)=sum(dL4da);

dQdgmki=zeros(n,3); dL4dgmki=zeros(n,3);
for k=1:3
    dQdgmki(:,k)=-P.*B(:,k).*A.^(a-1);
    dL4dgmki(:,k)=dQdgmki(:,k).*Q.^(-1);
    g4(k+1)=sum(dL4dgmki(:,k));
end
dQdBt1i=zeros(n,v1); dL4dBt1i=zeros(n,v1); dL4dBt1=zeros(n,v1);
for k=1
    for v=1:v1
        dQdBt1i(:,v)=-P*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*A.^(a-1);
        dL4dBt1i(:,v)=dQdBt1i(:,v).*Q.^(-1);
        g4(4+v)=sum(dL4dBt1i(:,v));
    end
end

dQdBt2i=zeros(n,v1); dL4dBt2i=zeros(n,v1); dL4dBt2=zeros(n,v1);
for k=2
    for v=1:v1
        dQdBt2i(:,v)=-P*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*A.^(a-1);
        dL4dBt2i(:,v)=dQdBt2i(:,v).*Q.^(-1);
        g4(4+v1+v)=sum(dL4dBt2i(:,v));
    end
end

dQdBt3i=zeros(n,v1); dL4dBt3i=zeros(n,v1); dL4dBt3=zeros(n,v1);
for k=3
    for v=1:v1
        dQdBt3i(:,v)=-P*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*A.^(a-1);
        dL4dBt3i(:,v)=dQdBt3i(:,v).*Q.^(-1);
        g4(4+2*v1+v)=sum(dL4dBt3i(:,v));
    end
end

g4; g=g1+g2+g3+g4; %% Vektor Gradien g %%

%% Menentukan Matriks H1 %%

%% Elemen diagonal utama H1 %%%%%%%%%
d2L1daai=(3/a^2)*ones(n,1)-(2/a^3)*(gm(1)*BtmLn(:,1)+
    gm(2)*BtmLn(:,2)+gm(3)*BtmLn(:,3));
H1(1,1)=sum(d2L1daai);
for k=1:3
    d2L1gmkgmki=-ones(n,1)/gm(k)^2;
    d2L1gmkgmk=bb.*d2L1gmkgmki ; H1(k+1,k+1)=sum(d2L1gmkgmki);
end

%% Elemen baris ke-1 dari H1 %%
for k=1:3
    d2L1dadgmki=(1/a^2)*BtmLn(:,k);
    H1(1,k+1)=sum(d2L1dadgmki);
end

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L1dadBti=(1/a^2)*gm(k)*X(:,v);
        H1(1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L1dadBti);
    end
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L1dgmdbti=-(1/a)*X(:,v);
        H1(k+1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L1dgmdbti);
    end
end
%% Menentukan matriks Simetri H1 %%
for j=1:pr-1
    for i=1:pr-j
        H1(i+j,j)=H1(j,i+j);
    end
end; H1;

%% Menentukan matriks H2 %%
H2=zeros(pr,pr);
%% Elemen diagonal utama H2(1:4;1:4)%%
d2L2daai=((a-m)/a^2)*(A.*Mb-M.^2)./(A.^2)+(2*m/a^2)*M./A;

H2(1,1)=sum(d2L2daai);
for k=1:3
    d2L2dgmkdgmki=((a-m)/a^2)*(A.*Bb(:,k)-B(:,k).^2).*A.^(-2);

    H2(k+1,k+1)=sum(d2L2dgmkdgmki);
end
%% Elemen baris ke-1 dari H2 %%%
for k=1:3
    d2L2dadgmki=(1/a^2)*(((a-m)*M-m*A).*B(:,k)-((a-m)/a)*gm(k)*
        Bb(:,k).*A).*A.^(-2);
    H2(1,k+1)=sum(d2L2dadgmki);
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L2dadBtai=(1/a^2)*((a-m)*M-m*A).*D(:,k)*gm(k).*
            X(:,v).*A.^(-2);
        d2L2dadBtbi=-((a-m)/a^3)*gm(k)^2*B(:,k).*
            X(:,v).*A.^(-1);
        d2L2dadBti=d2L2dadBtai+d2L2dadBtbi;
        H2(1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L2dadBti);
    end
end
%% Elemen pada baris ke-2 dari H2 %%%
for k=1:2
    d2L2dgmldgm23i=-((a-m)/a^2)*B(:,1).*B(:,k+1).*A.^(-2);

    H2(2,2+k)=sum(d2L2dgmldgm23i);
end
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L2dgmldBt23i=-((a-m)/a^2)*B(:,1)*
            gm(k+1).*D(:,k+1).*X(:,v).*A.^(-2);
        H2(2,4+k*v1+v)=sum(d2L2dgmldBt23i);
    end
end
end

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L2dgmdbt1i=((a-m)/a^2)*(A-D(:,k))*gm(k).*B(:,k)-
            a*A.*D(:,k)).*X(:,v).*A.^(-2);
        H2(k+1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L2dgmdbt1i);
    end
end
%% Elemen baris ke-3 dari H2 %%
d2L2dgm2dgm3i=-((a-m)/a^2)*B(:,2).*B(:,3).*A.^(-2);
H2(3,4)=sum(d2L2dgm2dgm3i);
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L2dgm2dBt13i=-((a-m)/a^2)*B(:,2)*
            gm(2*k-1).*D(:,2*k-1).*X(:,v).*A.^(-2);
        H2(3,4+2*(k-1)*v1+v)=sum(d2L2dgm2dBt13i);
    end
end
%% Elemen baris ke-4 dari H2 %%%
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L2dgm3dBt12i=-((a-m)/a^2)*B(:,3)*
            gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*A.^(-2);
        H2(4,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L2dgm3dBt12i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H2(5:9,5:9)%%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L2dBt1Bt1i=((a-m)/a^2)*(A-D(:,1))* %Pers.(4.34g)%
            gm(1)^2.*D(:,1).*X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(-2);
        H2(u+4,4+u+v-1)=sum(d2L2dBt1Bt1i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H2(10:14,10:14) %%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L2dBt2Bt2i=((a-3)/a^2)*(A-D(:,2))* %Pers.(4.34g)%
            gm(2)^2.*D(:,2).*X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(-2);
        H2(4+v1+u,4+v1+u+v-1)=sum(d2L2dBt2Bt2i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H2(15:19,15:19)%%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L2dBt3Bt3i=((a-m)/a^2)*(A-D(:,3))* %Pers.(4.34g)%
            gm(3)^2.*D(:,3).*X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(-2);
        H2(4+2*v1+u,4+2*v1+u+v-1)=sum(d2L2dBt3Bt3i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H2(5:9,10:14)%%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L2dBt1Bt2i=-((a-m)/a^2)*gm(1)*gm(2)* %Pers.(4.34e)%
            D(:,1).*D(:,2).*X(:,u).*X(:,v).*A.^(-2);
        H2(u+4,4+v1+v)=sum(d2L2dBt1Bt2i);
    end
end

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

%% Elemen Sub matriks H2(5:9,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L2dBt1Bt3i=-((a-m)/a^2)*gm(1)*gm(3)*
            D(:,1).*D(:,3).*X(:,u).*X(:,v).*A.^(-2);
        H2(u+4,4+2*v1+v)=sum(d2L2dBt1Bt3i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H2(10:14,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L2dBt2Bt3i=-((a-m)/a^2)*gm(2)*gm(3)*
            D(:,2).*D(:,3).*X(:,u).*X(:,v).*A.^(-2);
        H2(4+v1+u,4+2*v1+v)=sum(d2L2dBt2Bt3i);
    end
end
H2;
%% Menentukan matriks Simetri H2 %%
for j=1:pr-1
    for i=1:pr-j
        H2(i+j,j)=H2(j,i+j);
    end
end
H2;

%% Menentukan matriks H3 %%
H3=zeros(pr,pr);
%% Elemen diagonal utama H3(1:4;1:4) %%
Ub=M.*log(A)+Mb;
d2L3daai=-(1/a)*(A.*Ub+(a*U-M).*U).*A.^(a-2);
H3(1,1)=sum(d2L3daa);
for k=1:3
    d2L3dgmkgmki=-(1/a)*(A.*Bb(:,k)+(a-1)*(B(:,k)).^2).*A.^(a-2);
    H3(k+1,k+1)=sum(d2L3dgmkgmki);
end
%% Elemen baris ke-1 dari H3 %%
for k=1:3
    d2L3dadgmki=(1/a^2)*(gm(k)*A.*Bb(:,k)+a*(a*U-M).*B(:,k)).*
        A.^(a-2);
    H3(1,k+1)=sum(d2L3dadgmki);
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L3dadBti=(1/a^2)*(gm(k)*A.*B(:,k)+a*(a*U-M).*D(:,k)).*
            gm(k).*X(:,v).*A.^(a-2);
        H3(1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L3dadBti);
    end
end
%% Elemen baris ke-2 dari H3 %%%
for k=1:2
    d2L3dgmldgm23i=-((a-1)/a)*B(:,1).*B(:,k+1).*A.^(a-2);
    H3(2,2+k)=sum(d2L3dgmldgm23i);
end
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L3dgmldBt23i=-((a-1)/a)*B(:,1)*gm(k+1).*D(:,k+1).*
            X(:,v).*A.^(a-2);
        H3(2,4+k*v1+v)=sum(d2L3dgmldBt23i);
    end
end
H3;

```



## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L3dgmdbtai=(D(:,k)-(gm(k)/a)*B(:,k)).*X(:,v).*A.^(a-1);
        d2L3dgmdbtbi=-((a-1)/a)*gm(k)*B(:,k).*D(:,k).*
            X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L3dgmdbti=d2L3dgmdbtai+d2L3dgmdbtbi;
        H3(k+1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L3dgmdbti);
    end
end
%% Elemen baris ke-3 dari H3 %%%
d2L3dgm2dgm3i=-((a-1)/a)*B(:,2).*B(:,3).*A.^(a-2);
d2L3dgm2dgm3=bb.*d2L3dgm2dgm3i; H3(3,4)=sum(d2L3dgm2dgm3);
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L3dgm2dBt13i=-((a-1)/a)*B(:,2)*
            gm(2*k-1).*D(:,2*k-1).*X(:,v).*A.^(a-2);
        H3(3,4+2*(k-1)*v1+v)=sum(d2L3dgm2dBt13i);
    end
end
%% Elemen pada baris ke-4 dari H3 %%%
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L3dgm3dBt12i=-((a-1)/a)*B(:,3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        H3(4,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L3dgm3dBt12i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H3(5:9,5:9) %%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L3dBt1Bt1i=-(1/a)*(A+(a-1)*D(:,1))*
            gm(1)^2.*D(:,1).*X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        H3(u+4,4+u+v-1)=sum(d2L3dBt1Bt1i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H3(10:14,10:14) %%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L3dBt2Bt2i=-(1/a)*(A+(a-1)*D(:,2))*
            (gm(2)^2).*D(:,2).*X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        H3(4+v1+u,4+v1+u+v-1)=sum(d2L3dBt2Bt2i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H3(15:19,15:19) %%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L3dBt3Bt3i=-(1/a)*(A+(a-1)*D(:,3))*
            (gm(3)^2).*D(:,3).*X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        H3(4+2*v1+u,4+2*v1+u+v-1)=sum(d2L3dBt3Bt3i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H3(5:9,10:14) %%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L3dBt1Bt2i=-((a-1)/a)*gm(1)*gm(2)*
            D(:,1).*D(:,2).*X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        H3(u+4,4+v1+v)=sum(d2L3dBt1Bt2i);
    end
end

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

%% Elemen Sub matriks H3(5:9,15:19) %%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L3dBt1Bt3i=-((a-1)/a)*gm(1)*gm(3)*
            D(:,1).*D(:,3).*X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        H3(u+4,4+2*v1+v)=sum(d2L3dBt1Bt3i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H3(10:14,15:19) %%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L3dBt2Bt3i=-((a-1)/a)*gm(2)*gm(3)*
            D(:,2).*D(:,3).*X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        H3(4+v1+u,4+2*v1+v)=sum(d2L3dBt2Bt3i);
    end
end; H3;
%% Membangun matriks Simetri H3 %%%
for j=1:pr-1
    for i=1:pr-j
        H3(i+j,j)=H3(j,i+j);
    end
end; H3;

%% Menentukan Matriks H4 %%
H4=zeros(pr,pr);
%% Elemen diagonal utama H4(1:4;1:4) %%%
pz1=6*(a-1)*ones(n,1)-6*(3*a-1)*A.^a+6*A.^(2*a);
pz2=6*a^2*A.^(2*a-1)-3*a*(3*a-2)*A.^(a-1);
pz3=2*a^3*U.*A.^(2*a-2);
pz4=(P/a).*(a*U-M).*A.^(a-2); pz5=2*pz2+pz3+pz4;
pz6=(P/a).*A.^(a-1);
rho=2*(a^4)*A.^a+(a-1)*P;
d2Qdadai=pz1+pz5.*U+pz6.*Ub;
d2L4dadai=(d2Qdadai.*Q-dQdai.*dQdai).*Q.^(-2);
H4(1,1)=sum(d2L4dadai);
for k=1:3
    d2Qdgmkgmki=(1/a)*(rho.*B(:,k).^2+P.*A.*Bb(:,k)).*A.^(a-2);
    d2L4dgmkgmki=(d2Qdgmkgmki.*Q-dQdgmki(:,k).^2).*Q.^(-2);
    H4(k+1,k+1)=sum(d2L4dgmkgmki);
end
%% Elemen baris ke-1 dari H4 %%%
for k=1:3
    Vk=(1/a^2)*(gm(k)*A.*Bb(:,k)+a*(a*U-M).*B(:,k)).*P;
    d2Qdadgmki=-(pz2+pz3).*B(:,k)-Vk.*A.^(a-2);
    d2L4dadgmki=(d2Qdadgmki.*Q-dQdai.*dQdgmki(:,k)).*Q.^(-2);

    H4(1,k+1)=sum(d2L4dadgmki);
end
for k=1
    Nk=(1/a^2)*(gm(k)*A.*B(:,k)+a*(a*U-M).*D(:,k)).*P*gm(k);
    for v=1:v1
        d2QdadBt1i=-(pz2+pz3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v)-Nk.*
            X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dadBt1i=(d2QdadBt1i.*Q-dQdai.*dQdBt1i(:,v)).*Q.^(-2);

        H4(1,4+v)=sum(d2L4dadBt1i);
    end
end
end

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

for k=2
    Nk=(1/a^2)*(gm(k)*A.*B(:,k)+a*(a*U-M).*D(:,k)).*P*gm(k);
    for v=1:v1
        d2QdadBt2i=-(pz2+pz3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v)-
            Nk.*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dadBt2i=(d2QdadBt2i.*Q-dQdai.*dQdBt2i(:,v)).*Q.^(-2);

        H4(1,4+v1+v)=sum(d2L4dadBt2i);
    end
end
for k=3
    Nk=(1/a^2)*(gm(k)*A.*B(:,k)+a*(a*U-M).*D(:,k)).*P*gm(k);
    for v=1:v1
        d2QdadBt3i=-(pz2+pz3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v)-
            Nk.*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dadBt3i=(d2QdadBt3i.*Q-dQdai.*dQdBt3i(:,v)).*Q.^(-2);

        H4(1,4+2*v1+v)=sum(d2L4dadBt3i);
    end
end

%% Elemen baris ke-2 dari H4 %%
for k=1:2
    d2Qdgm1dgm23i=(1/a)*rho.*B(:,1).*B(:,k+1).*A.^(a-2);
    d2L4dgm1dgm23i=(d2Qdgm1dgm23i.*Q-
        dQdgmki(:,1).*dQdgmki(:,k+1)).*Q.^(-2);
    H4(2,2+k)=sum(d2L4dgm1dgm23i);
end

for k=1
    for v=1:v1
        d2Qdgm1dBt2i=(1/a)*rho.*B(:,1)*gm(k+1).*D(:,k+1).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2L4dgm1dBt2i=(d2Qdgm1dBt2i.*Q-
            dQdgmki(:,1).*dQdBt2i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(2,4+v1+v)= sum(d2L4dgm1dBt2i);
    end
end
for k=2
    for v=1:v1
        d2Qdgm1dBt3i=(1/a)*rho.*B(:,1)*gm(k+1).*D(:,k+1).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2L4dgm1dBt3i=(d2Qdgm1dBt3i.*Q-
            dQdgmki(:,1).*dQdBt3i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(2,4+2*v1+v)= sum(d2L4dgm1dBt3i);
    end
end

for k=1
    for v=1:v1
        d2Qdgm1dBt1ai=(1/a)*rho*gm(k).*B(:,k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2Qdgm1dBt1bi=(1/a)*(gm(k)*B(:,k)-a*D(:,k)).*P.*
            X(:,v).*A.^(a-1);
        d2Qdgm1dBt1i=d2Qdgm1dBt1ai+d2Qdgm1dBt1bi;
        d2L4dgm1dBt1i=(d2Qdgm1dBt1i.*Q-
            dQdgmki(:,k).*dQdBt1i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(k+1,4+v)=sum(d2L4dgm1dBt1i);
    end
end
end

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

for k=2
    for v=1:v1
        d2Qdgm2dBt2ai=(1/a)*rho*gm(k).*B(:,k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2Qdgm2dBt2bi=(1/a)*(gm(k).*B(:,k)-a.*D(:,k)).*P.*X(:,v).*
            A.^(a-1);
        d2Qdgm2dBt2i=d2Qdgm2dBt2ai+d2Qdgm2dBt2bi;
        d2L4dgm2dBt2i=(d2Qdgm2dBt2i.*Q-
            dQdgmki(:,k).*dQdBt2i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(k+1,4+v1+v)=sum(d2L4dgm2dBt2i);
    end
end

for k=3
    for v=1:v1
        d2Qdgm3dBt3ai=(1/a)*rho*gm(k).*B(:,k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2Qdgm3dBt3bi=(1/a)*(gm(k).*B(:,k)-a.*D(:,k)).*P.*X(:,v).*
            A.^(a-1);
        d2Qdgm3dBt3i=d2Qdgm3dBt3ai+d2Qdgm3dBt3bi;
        d2L4dgm3dBt3i=(d2Qdgm3dBt3i.*Q-
            dQdgmki(:,k).*dQdBt3i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(k+1,4+2*v1+v)=sum(d2L4dgm3dBt3i);
    end
end

%% Elemen baris ke-3 dari H4 %%
d2Qdgm2dgm3i=(1/a)*rho.*B(:,2).*B(:,3).*A.^(a-2); %Pers.(4.43x)%
d2L4dgm2dgm3i=(d2Qdgm2dgm3i.*Q-dQdgmki(:,2).*dQdgmki(:,3)).*
    Q.^(-2);
H4(3,4)=sum(d2L4dgm2dgm3i);
for k=1
    for v=1:v1
        d2Qdgm2dBt1i=(1/a)*rho.*B(:,2)*
            gm(2*k-1).*D(:,2*k-1).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dgm2dBt1i=(d2Qdgm2dBt1i.*Q-
            dQdgmki(:,2).*dQdBt1i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(3,4+v)= sum(d2L4dgm2dBt1i);
    end
end

for k=2
    for v=1:v1
        d2Qdgm2dBt3i=(1/a)*rho.*B(:,2)*
            gm(2*k-1).*D(:,2*k-1).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dgm2dBt3i=(d2Qdgm2dBt3i.*Q-
            dQdgmki(:,2).*dQdBt3i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(3,4+2*v1+v)= sum(d2L4dgm2dBt3i);
    end
end

%% Elemen pada baris ke-4 dari H3 %%
for k=1
    for v=1:v1
        d2Qdgm3dBt1i=(1/a)*rho.*B(:,3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2L4dgm3dBt1i=(d2Qdgm3dBt1i.*Q-
            dQdgmki(:,3).*dQdBt1i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(4,4+v)=sum(d2L4dgm3dBt1i);
    end
end
end

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

for k=2
    for v=1:v1
        d2Qdgm3dBt2i=(1/a)*rho.*B(:,3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2L4dgm3dBt2i=(d2Qdgm3dBt2i.*Q-
            dQdgmki(:,3).*dQdBt2i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(4,4+v1+v)=sum(d2L4dgm3dBt2i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H4(5:9,5:9)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2QdBt1dBt1i=(1/a)*(rho.*D(:,1)+P.*A)*gm(1)^2.*
            D(:,1).*X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        d2L4dBt1dBt1i=(d2QdBt1dBt1i.*Q-
            dQdBt1i(:,u).*dQdBt1i(:,v+u-1)).*Q.^(-2);

        H4(u+4,v+u+4-1)=sum(d2L4dBt1dBt1i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H4(10:14,10:14)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2QdBt2dBt2i=(1/a)*(rho.*D(:,2)+
            P.*A)*gm(2)^2.*D(:,2).*X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        d2L4dBt2dBt2i=(d2QdBt2dBt2i.*Q-
            dQdBt2i(:,u).*dQdBt2i(:,v+u-1)).*Q.^(-2);
        H4(4+v1+u,4+v1+u+v-1)=sum(d2L4dBt2dBt2i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H4(15:19,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2QdBt3dBt3i=(1/a)*(rho.*D(:,3)+
            P.*A)*gm(3)^2.*D(:,3).*X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        d2L4dBt3dBt3i=(d2QdBt3dBt3i.*Q-
            dQdBt3i(:,u).*dQdBt3i(:,v+u-1)).*Q.^(-2);
        H4(4+2*v1+u,4+2*v1+u+v-1)=sum(d2L4dBt3dBt3i);
    end
end
%% Entri Sub matriks H4(5:9,10:14)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2QdBt1dBt2i=(1/a)*rho*gm(1).*D(:,1)*
            gm(2).*D(:,2).*X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dBt1dBt2i=(d2QdBt1dBt2i.*Q-
            dQdBt1i(:,u).*dQdBt2i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(u+4,4+v1+v)=sum(d2L4dBt1dBt2i);
    end
end
%% Elemen Sub matriks H4(5:9,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2QdBt1dBt3i=(1/a)*rho*gm(1).*D(:,1)*
            gm(3).*D(:,3).*X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dBt1dBt3i=(d2QdBt1dBt3i.*Q-
            dQdBt1i(:,u).*dQdBt3i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(u+4,4+2*v1+v)=sum(d2L4dBt1dBt3i);
    end
end
end

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

%% Elemen Sub matriks H4(10:14,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2QdBt2dBt3i=(1/a)*rho*gm(2).*D(:,2)*
            gm(3).*D(:,3).*X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dBt2dBt3i=(d2QdBt2dBt3i.*Q-
            dQdBt2i(:,u).*dQdBt3i(:,v)).*Q.^(-2);
        H4(4+v1+u,4+2*v1+v)=sum(d2L4dBt2dBt3i);
    end
end
H4;

%% Membangun matriks Simetri H4%%
for j=1:pr-1
    for i=1:pr-j
        H4(i+j,j)=H4(j,i+j);
    end
end
H4;
H=H1+H2+H3+H4; %% matriks Hessian H %%

%% Harga baru vektor tetha %%
thb=thl-H\g; %% harga vektor tetha baru %%
nrm=norm(thb-thl); %% norm dari selisih tetha baru dan lama %%
if nrm<nrm0

format short
if thb(1)>0
if thb(1)<=1
    tetha=thb;
    FI=inv(-H);
    SE1=zeros(2,1); Z1=zeros(2,1);
for j=1:2
    SE1(j)=sqrt(FI(j,j));
    Z1(j)=thb(j)/SE1(j);
end
SE2=zeros(2,1); Z2=zeros(2,1);
for j=1:2
    SE2(j)=sqrt(FI(j+2,j+2));
    Z2(j)=thb(j+2)/SE2(j);
end
SE3=zeros(pr-1,1); Z3=zeros(pr-4,1);
for j=1:pr-4
    SE3(j)=sqrt(FI(j+4,j+4));
    Z3(j)=thb(j+4)/SE3(j);
end
SE=[SE1;SE2;SE3];
Z=[Z1;Z2;Z3];
betha=thb(5:pr);
Sd_betha=SE3;
Z_betha=Z3;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a=tetha(1); gm=tetha(2:4);Bt1=tetha(5:4+v1);
Bt2=tetha(5+v1:4+2*v1); Bt3=tetha(5+2*v1:pr);
for k=1:v1
    Bt1Xa(:,k)=Bt1(k)*X(:,k);
    Bt2Xa(:,k)=Bt2(k)*X(:,k);
    Bt3Xa(:,k)=Bt3(k)*X(:,k);
end

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

for k=1:n
    Bt1X(k)=sum(Bt1Xa(k,:));
    Bt2X(k)=sum(Bt2Xa(k,:));
    Bt3X(k)=sum(Bt3Xa(k,:));
end
BtX=[Bt1X,Bt2X,Bt3X];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
L1=log(ftopi);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Parameter DWT Populasi %%%%%%%%%
a00=0.718236702285207;
gm11=1.135254332873529; gm22=2.2972044462019597;
gm33=1.248571148805102;
lm11=36.092586160253951; lm22=4.590411454124541;
lm33=0.277081505445182;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D11a=(1/a00)*(gm11/lm11)*(y(:,1)/lm11).^((gm11/a00)-1);
D12a=(1/a00)*(gm22/lm22)*(y(:,2)/lm22).^((gm22/a00)-1);
D13a=(1/a00)*(gm33/lm33)*(y(:,3)/lm33).^((gm33/a00)-1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Wa=(y(:,1)/lm11).^((gm11/a00)+(y(:,2)/lm22).^((gm22/a00)+
y(:,3)/lm33).^((gm33/a00));
Qa=a00*(a00-1)*(a00-2)*ones(n,1)-3*(a00^2)*(a00-1)*(Wa.^a00)+(a00^3)*(Wa.^(2*a00));
fa=D11a.*D12a.*D13a.*(exp(-Wa.^a00)).*(Wa.^(a00-3)).*Qa;
KE=(fa-ftopi).^2;
MSE=(1/n)*sum(KE); SE=sqrt(MSE);
BIC=-2*sum(L1)+log(n)*pr; AIC=-2*sum(L1)+2*pr

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Lamba_Topi %%%%%%%%%
KE_Lm1=(ones(n,1)*lm1-exp(Bt1X)).^2;
KE_Lm2=(ones(n,1)*lm2-exp(Bt2X)).^2;
KE_Lm3=(ones(n,1)*lm3-exp(Bt3X)).^2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
KE_Lm=KE_Lm1+KE_Lm2+KE_Lm3;
JKE_Lm=sum(KE_Lm);
MSE_Lm=1/n*JKE_Lm;
format short
tetha=thb;
nrm; MSE; MSE_Lm;
a0
gm0
BIC;
L1max=sum(L1);
break
end
end
end

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

        if nrm < nr0
            if thb(1)>0
                if thb(1)<=1
                    break
                end
            end
        end
    end
end
    if nrm < nr0
        if thb(1)>0
            if thb(1)<=1
                break
            end
        end
    end
end
    if nrm < nr0
        if thb(1)>0
            if thb(1)<=1
                break
            end
        end
    end
end
    if nrm < nr0
        if thb(1)>0
            if thb(1)<=1
                break
            end
        end
    end
end
    if nrm < nr0
        if thb(1)>0
            if thb(1)<=1
                break
            end
        end
    end
end
    if nrm < nr0
        if thb(1)>0
            if thb(1)<=1
                break
            end
        end
    end
end
    if nrm < nr0
        if thb(1)>0
            if thb(1)<=1
                break
            end
        end
    end
end
end
L0=xlsread('L_B0_Global.xlsx');
L0max=sum(L0);
G_Tabel=21.03;
G_n=2*(L1max-L0max);
if G_n>G_Tabel %db9=16.92; db12=21.03; db6=12.59;
    Keputusan_Uji=1;
else
    Keputusan_Uji=0;
end

tetha;
Betha_Topi=zeros(v1,3);
Z_Betha_Topi=zeros(v1,3);
Betha_Topi(:,1)=tetha(5:5+v1-1);Betha_Topi(:,2)=tetha(5+v1:5+2*v1-1);
Betha_Topi(:,3)=tetha(5+2*v1:5+3*v1-1);
Z_Betha_Topi(:,1)=Z_betha(1:v1);Z_Betha_Topi(:,2)=Z_betha(v+1:2*v1);
Z_Betha_Topi(:,3)=Z_betha(2*v1+1:3*v1);
Betha_Topi; Z_Betha_Topi;
a=tetha(1); gm1=tetha(2); gm2=tetha(3); gm3=tetha(4);
Keputusan_Uji;

```



## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

disp('Penaksir Parameter a dan Parameter Bentuk Model RWM')
disp(sprintf('\n====='))
disp('      a          gm1          gm2          gm3')
disp(sprintf('%5.4f %9.4f %10.4f %10.4f',a,gm1,gm2,gm3))
disp(sprintf('\n====='))
disp('Penaksir Vektor Parameter Regresi Model RWM')
disp(sprintf('\n====='))
Betha_Topi
disp(sprintf('\n====='))

disp('Nilai Statistik Z Penaksir Parameter Regresi Model RWM')
disp(sprintf('\n====='))
Z_Betha_Topi
disp(sprintf('\n====='))

Z_Betha_Topi_Kuadrat=(Z_Betha_Topi).^2;
disp('Nilai Statistik Z_Kuadrat Penaksir Parameter Regresi Model
RWM')
disp(sprintf('\n====='))
Z_Betha_Topi_Kuadrat
disp(sprintf('\n====='))

disp('Nilai Statistik G_n dan G_Tabel Pada Pengujian Serentak Model
RWM')
disp(sprintf('\n====='))
disp(' L0max      L0max      G_n      G_Tabel      Kesimpulan_Uji')
disp(sprintf('%5.4f %10.4f %10.4f %10.4f
%10.0f',L0max,L0max,G_n,G_Tabel,Keputusan_Uji))
disp(sprintf('\n====='))
disp('Ket: 0 = Gagal menolak H0, 1 = Menolak H0')

disp('Ukuran Keباikan Model RWM')
disp(sprintf('\n====='))
disp('nrm          BIC          AIC')
disp(sprintf('%5.15f %20.15f %20.15f',nrm,BIC,AIC))
disp(sprintf('\n====='))

%% RASIO %%
ORf=zeros(1,4);ORs=zeros(1,4);ORLm1=zeros(1,4);ORLm2=zeros(1,4);
ORLm3=zeros(1,4);
h=1; r=5;

tetha_A=tetha;
a=tetha_A(1); gm=tetha_A(2:4);Bt1=tetha_A(5:4+v1);
Bt2=tetha_A(5+v1:4+2*v1);
Bt3=tetha_A(5+2*v1:pr);

for k=1
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*X
(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*X
(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*X
(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi=exp(-W.^a);
Lm1_Topi=exp(Bt1X);Lm2_Topi=exp(Bt2X);Lm3_Topi=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*(X(:,2)+h)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*(X(:,2)+h)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*(X(:,2)+h)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi_h=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi_h=exp(-W.^a);
Lm1_Topi_h=exp(Bt1X);Lm2_Topi_h=exp(Bt2X);Lm3_Topi_h=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format short
Orf1=ftopi_h./ftopi;
Ors1=S_Topi_h./S_Topi;
ORf(k)=Orf1(r);ORs(k)=Ors1(r);
ORLm11=Lm1_Topi_h./Lm1_Topi; ORLm1(k)=ORLm11(r);
ORLm21=Lm2_Topi_h./Lm2_Topi; ORLm2(k)=ORLm21(r);
ORLm31=Lm3_Topi_h./Lm3_Topi; ORLm3(k)=ORLm31(r);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for k=2
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi=exp(-W.^a);
Lm1_Topi=exp(Bt1X);Lm2_Topi=exp(Bt2X);Lm3_Topi=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*(X(:,3)+h)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(
5)*X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*(X(:,3)+h)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(
5)*X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*(X(:,3)+h)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(
5)*X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi_h=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi_h=exp(-W.^(a));
Lm1_Topi_h=exp(Bt1X);Lm2_Topi_h=exp(Bt2X);Lm3_Topi_h=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format short
Orf2=ftopi_h./ftopi;
Ors2=S_Topi_h./S_Topi;
ORf(k)=Orf2(r);ORs(k)=Ors2(r);
ORLm12=Lm1_Topi_h./Lm1_Topi; ORLm1(k)=ORLm12(r);
ORLm22=Lm2_Topi_h./Lm2_Topi; ORLm2(k)=ORLm22(r);
ORLm32=Lm3_Topi_h./Lm3_Topi; ORLm3(k)=ORLm32(r);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for k=3
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*X
(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*X
(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*X
(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi=exp(-W.^(a));
Lm1_Topi=exp(Bt1X);Lm2_Topi=exp(Bt2X);Lm3_Topi=exp(Bt3X);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*(X(:,4)+h)+Bt1(
5)*X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*(X(:,4)+h)+Bt2(
5)*X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*(X(:,4)+h)+Bt3(
5)*X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```

D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi_h=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi_h=exp(-W.^(a));
Lm1_Topi_h=exp(Bt1X); Lm2_Topi_h=exp(Bt2X); Lm3_Topi_h=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format short
Orf3=ftopi_h./ftopi;
Ors3=S_Topi_h./S_Topi;
ORf(k)=Orf3(r); ORs(k)=Ors3(r);
ORLm13=Lm1_Topi_h./Lm1_Topi; ORLm1(k)=ORLm13(r);
ORLm23=Lm2_Topi_h./Lm2_Topi; ORLm2(k)=ORLm23(r);
ORLm33=Lm3_Topi_h./Lm3_Topi; ORLm3(k)=ORLm33(r);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for k=4
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi=exp(-W.^(a));
Lm1_Topi=exp(Bt1X); Lm2_Topi=exp(Bt2X); Lm3_Topi=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*(X(:,5)+h);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*(X(:,5)+h);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*(X(:,5)+h);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi_h=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi_h=exp(-W.^(a));
Lm1_Topi_h=exp(Bt1X); Lm2_Topi_h=exp(Bt2X); Lm3_Topi_h=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

## Lampiran 8 (Lanjutan)

```
format short
Orf4=ftopi_h./ftopi;
Ors4=S_Topi_h./S_Topi;
ORf(k)=Orf4(r); ORs(k)=Ors4(r);
ORLm14=Lm1_Topi_h./Lm1_Topi; ORLm1(k)=ORLm14(r);
ORLm24=Lm2_Topi_h./Lm2_Topi; ORLm2(k)=ORLm24(r);
ORLm34=Lm3_Topi_h./Lm3_Topi; ORLm3(k)=ORLm34(r);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%ORs=[Ors1(r),Ors2(r),Ors3(r),Ors4(r)];
R_Lm1=ORLm1;R_Lm2=ORLm2;R_Lm3=ORLm3;
disp('Rasio Nilai Parameter Skala R_Lm1, R_Lm2 dan R_Lm3')
disp(sprintf('\n====='))
R_Lm1
R_Lm2
R_Lm3
disp(sprintf('\n====='))

R_f= ORf; R_S=ORs;
disp('Rasio Nilai FKP (R_f) dan Fungsi Survival (R_S)')
disp(sprintf('\n====='))
R_f
R_S
disp(sprintf('\n====='))
```

## Lampiran 9

Program Matlab pada penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model GWMWR

```
clc; clear all;

%% Data Respon dan Kovariat
y=input('Masukkan Data Respon y = ');
n=length(y(:,1));
X=input('Masukkan Data Kovariat X = ');
X0=ones(n,1); % Kovariat untuk Bt0 %
X=[X0,X];
v1=length(X(1,:)); % banyaknya kovariat termasuk konstanta %

%% Menghitung jarak antar lokasi pengamatan %%
LinBu=xlsread('L_Bujur.xlsx');
UL=LinBu(:,1); VB=LinBu(:,2); %%UL=Lintang; VB=Bujur %%
d=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        d(j,i)=sqrt((UL(i)-UL(j))^2+(VB(i)-VB(j))^2);
    end
end

%% Bandwidth %%
bw=xlsread('BW_BIC_3489_GaF.xlsx');
%bw=xlsread('BW_BIC_3489_TriF.xlsx');
%bw=xlsread('BW_BIC_3489_BiF.xlsx');

%% Menghitung Pembobot Spasial %%
w=zeros(n,n);
for lk=1:n
    for j=1:n
        w(j,lk)=exp(-1/2*(d(j,lk)/bw(lk))^2); %% Gauss Kernel%
        %w(j,lk)=(1-(d(j,lk)/bw(lk))^2)^2; %%Bisquare %%
        %w(j,lk)=(1-(d(j,lk)/bw(lk))^3)^3; %%Tricube %%
    end
end

v1=length(X(1,:));
pr=4+3*v1; %% banyaknya parameter%%
%% Harga awal %%
tetha_Topi=zeros(pr,n);nr=zeros(1,n);KE_Lokal=zeros(n,1);
JKE_Lokal=zeros(1,1); LF_Lokal=zeros(n,1);JLF_Lokal=zeros(1,1);
Llmax=zeros(1,1);Z_tetha_Topi=zeros(pr,n);
Z_betha_Topi=zeros(pr-4,n);
lm1=37;lm2=4.5;lm3=0.2;
nr0=1*10^(-12); q0=30;

%% Iterasi NR dimulai %%
for lk=1:n
    bb=w(:,lk);
    %% Harga awal %%
    z1=1.6:0.1:2.0;
    z2=2.8:0.1:3.1;
    z3=1.8:0.1:2.1;
    z4=0.3:0.1:0.8;
    m1=length(z1);m2=length(z2);
    m3=length(z3);m4=length(z4);
```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

for j1=1:m1
    gm10=z1(j1);
for j2=1:m2
    gm20=z2(j2);
for j3=1:m3
    gm30=z3(j3);
for j4=1:m4
    a0=z4(j4)
Bt10=zeros(v1,1); Bt20=zeros(v1,1);Bt30=zeros(v1,1);
gm0=[gm10;gm20;gm30];
thb=[a0;gm0;Bt10;Bt20;Bt30];
thb(5)=log(lm1);thb(5+v1)=log(lm2);thb(5+2*v1)=log(lm3);
D=zeros(n,3); BtmLn=zeros(n,3); B=zeros(n,3); Bb=zeros(n,3);
Bt1Xa=zeros(n,v1); Bt2Xa=zeros(n,v1); Bt3Xa=zeros(n,v1);
Bt1X=zeros(n,1); Bt2X=zeros(n,1); Bt3X=zeros(n,1);

for q=1:q0
    q
    thl=thb;%%% thl=tetha lama danthb=tetha baru %%%
    a=thl(1);gm=thl(2:4);Bt1=thl(5:4+v1); Bt2=thl(5+v1:4+2*v1);
    Bt3=thl(5+2*v1:pr);
    %% Menghitung Betha dikali X %%
    for k=1:v1
        Bt1Xa(:,k)=Bt1(k)*X(:,k);
        Bt2Xa(:,k)=Bt2(k)*X(:,k);
        Bt3Xa(:,k)=Bt3(k)*X(:,k);
    end
    for k=1:n
        Bt1X(k)=sum(Bt1Xa(k,:));
        Bt2X(k)=sum(Bt2Xa(k,:));
        Bt3X(k)=sum(Bt3Xa(k,:));
    end
    BtX=[Bt1X,Bt2X,Bt3X];

    %% Menghitung Vektor g1 %%
    g1=zeros(pr,1);
    for k=1:3
        D(:,k)=y(:,k).^(gm(k)/a).*exp(-(gm(k)/a)*BtX(:,k));
        BtmLn(:,k)=BtX(:,k)-log(y(:,k)); %%% BtX-ln(y)%%
        B(:,k)=D(:,k).*BtmLn(:,k);
        Bb(:,k)=D(:,k).*BtmLn(:,k).^2;
    end
    dL1dai=-(3/a)*ones(n,1)+(1/a^2)*(gm(1)*BtmLn(:,1)+
        gm(2)*BtmLn(:,2)+ gm(3)*BtmLn(:,3));
    dL1da=bb.*dL1dai; g1(1)=sum(dL1da);
    for k=1:3
        dL1dgm1=ones(n,1)/gm(k)-(1/a)*BtmLn(:,k);
        dL1dgm=bb.*dL1dgm1; g1(k+1)=sum(dL1dgm);
    end
    for k=1:3
        for v=1:v1
            dL1dBti=-(gm(k)/a)*X(:,v);
            dL1dBt=bb.*dL1dBti; g1(4+(k-1)*v1+v)=sum(dL1dBt);
        end
    end
end
g1;

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

%% Vektor g2 %%
g2=zeros(pr,1);
A=D(:,1)+D(:,2)+D(:,3);
M=(1/a)*(gm(1)*B(:,1)+gm(2)*B(:,2)+gm(3)*B(:,3));
Mb=(1/a^2)*(gm(1)^2*Bb(:,1)+gm(2)^2*Bb(:,2)+gm(3)^2*Bb(:,3));
U=A.*log(A)+M;
dL2dai=(1/a)*(a*U-3*M).*A.^(-1);
dL2da=bb.*dL2dai; g2(1)=sum(dL2da);
for k=1:3
    dL2dgmki=-(a-3)/a*B(:,k).*A.^(-1);
    dL2dgmkb=bb.*dL2dgmki; g2(k+1)=sum(dL2dgmkb);
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        dL2dBti=-(a-3)/a*gm(k)*D(:,k).*X(:,v).*A.^(-1);
        dL2dBt=bb.*dL2dBti; g2(4+(k-1)*v1+v)=sum(dL2dBt);
    end
end
end
g2;

%% Vektor g3 %%
g3=zeros(pr,1);
Ub=M.*log(A)+Mb;
dL3dai=-U.*A.^(a-1);
dL3da=bb.*dL3dai; g3(1)=sum(dL3da);
for k=1:3
    dL3dgmki=B(:,k).*A.^(a-1);
    dL3dgmkb=bb.*dL3dgmki; g3(k+1)=sum(dL3dgmkb);
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        dL3dBti=gm(k)*D(:,k).*X(:,v).*A.^(a-1);
        dL3dBt=bb.*dL3dBti; g3(4+(k-1)*v1+v)=sum(dL3dBt);
    end
end
end
g3;

%% Vektor g4 %%
g4=zeros(pr,1); %dQdai=zeros(n,1);
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*A.^a+(a^3)*A.^(2*a);
K=3*((a-1)^2*ones(n,1)-a*(3*a-2)*A.^a+a^2*A.^(2*a))-ones(n,1);
P=2*a^3*A.^a-3*a^2*(a-1)*ones(n,1);
dQdai=K+P.*U.*A.^(a-1); dL4dai=dQdai.*Q.^(-1); %dL4da=sum(dL4dai);
dL4da=bb.*dL4dai; g4(1)=sum(dL4da);
dQdgmki=zeros(n,3); dL4dgmki=zeros(n,3); dL4dgmkb=zeros(n,3);
for k=1:3
    dQdgmki(:,k)=-P.*B(:,k).*A.^(a-1);
    dL4dgmki(:,k)=dQdgmki(:,k).*Q.^(-1);
    dL4dgmkb(:,k)=bb.*dL4dgmki(:,k);
    g4(k+1)=sum(dL4dgmkb(:,k));
end
dQdBtli=zeros(n,v1); dL4dBtli=zeros(n,v1); dL4dBt1=zeros(n,v1);
for k=1
    for v=1:v1
        dQdBtli(:,v)=-P*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*A.^(a-1);
        dL4dBtli(:,v)=dQdBtli(:,v).*Q.^(-1);
        dL4dBt1(:,v)=bb.*dL4dBtli(:,v); g4(4+v)=sum(dL4dBt1(:,v));
    end
end
end

```



## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

dQdBt2i=zeros(n,v1); dL4dBt2i=zeros(n,v1); dL4dBt2=zeros(n,v1);
for k=2
    for v=1:v1
        dQdBt2i(:,v)=-P*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*A.^(a-1);
        dL4dBt2i(:,v)=dQdBt2i(:,v).*Q.^(-1);
        dL4dBt2(:,v)=bb.*dL4dBt2i(:,v);
        g4(4+v1+v)=sum(dL4dBt2(:,v));
    end
end
dQdBt3i=zeros(n,v1); dL4dBt3i=zeros(n,v1); dL4dBt3=zeros(n,v1);
for k=3
    for v=1:v1
        dQdBt3i(:,v)=-P*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*A.^(a-1);
        dL4dBt3i(:,v)=dQdBt3i(:,v).*Q.^(-1);
        dL4dBt3(:,v)=bb.*dL4dBt3i(:,v);
        g4(4+2*v1+v)=sum(dL4dBt3(:,v));
    end
end
g4;
g=g1+g2+g3+g4;

%% Matriks H1 %%
H1=zeros(pr,pr);
%% Elemen diagonal utama H1 %%
d2L1daai=(3/a^2)*ones(n,1)-(2/a^3)*(gm(1)*BtmLn(:,1)+
    gm(2)*BtmLn(:,2)+gm(3)*BtmLn(:,3));
d2L1daa=bb.*d2L1daai; H1(1,1)=sum(d2L1daa);
for k=1:3
    d2L1gmkgmki=-ones(n,1)/gm(k)^2;
    d2L1gmkgmk=bb.*d2L1gmkgmki; H1(k+1,k+1)=sum(d2L1gmkgmk);
end
%% Elemen baris ke-1 dari H1 %%%
for k=1:3
    d2L1dadgmki=(1/a^2)*BtmLn(:,k);
    d2L1dadgmk=bb.*d2L1dadgmki;
    H1(1,k+1)=sum(d2L1dadgmk);
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L1dadBti=(1/a^2)*gm(k)*X(:,v);
        d2L1dadBt=bb.*d2L1dadBti;
        H1(1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L1dadBt);
    end
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L1dgmdBti=-(1/a)*X(:,v);
        d2L1dgmdBt=bb.*d2L1dgmdBti;
        H1(k+1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L1dgmdBt);
    end
end
H1;

%% Membentuk matriks Simetri H1 %%%
for j=1:pr-1
    for i=1:pr-j
        H1(i+j,j)=H1(j,i+j);
    end
end
H1;

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

H2=zeros(pr,pr);
%% Elemen diagonal utama H2%%
d2L2daai=(1/a^2)*(a*Ub-3*Mb+6*M).*A.^(-1)-(1/a^2)*(a*U-3*M).*
M.*A.^(-2);
d2L2daa=bb.*d2L2daai ;H2(1,1)=sum(d2L2daa);
for k=1:3
    d2L2dgmkdgmki=((a-3)/a^2)*(A.*Bb(:,k)-B(:,k).^2).*A.^(-2);
    d2L2dgmkdgmk=bb.*d2L2dgmkdgmki; H2(k+1,k+1)=sum(d2L2dgmkdgmk);
end
%% Elemen pada baris ke-1 dari H2%%
for k=1:3
    d2L2dadgmki=(1/a^2)*
        ((a-3)*M-3*A).*B(:,k)-((a-3)/a)*gm(k)*Bb(:,k).*A).*A.^(-2);
    d2L2dadgmk=bb.*d2L2dadgmki; H2(1,k+1)=sum(d2L2dadgmk);
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L2dadBtai=(1/a^2)*
            ((a-3)*M-3*A).*D(:,k)*gm(k).*X(:,v).*A.^(-2);
        d2L2dadBtbi=-((a-3)/a^3)*
            gm(k)^2*B(:,k).*X(:,v).*A.^(-1);
        d2L2dadBti=d2L2dadBtai+d2L2dadBtbi; d2L2dadBt=bb.*d2L2dadBti;
        H2(1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L2dadBt);
    end
end
%% Elemen pada baris ke-2 dari H2 %%
for k=1:2
    d2L2dgm1dgm23i=-((a-3)/a^2)*B(:,1).*B(:,k+1).*A.^(-2);
    d2L2dgm1dgm23=bb.*d2L2dgm1dgm23i;
    H2(2,2+k)=sum(d2L2dgm1dgm23);
end
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L2dgm1dBt23i=-((a-3)/a^2)*
            B(:,1)*gm(k+1).*D(:,k+1).*X(:,v).*A.^(-2);
        d2L2dgm1dBt23=bb.*d2L2dgm1dBt23i;
        H2(2,4+k*v1+v)= sum(d2L2dgm1dBt23);
    end
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L2dgm dBti=((a-3)/a^2)*((A-D(:,k))*gm(k).*
            B(:,k)-a*A.*D(:,k)).*X(:,v).*A.^(-2);
        d2L2dgm dBt=bb.*d2L2dgm dBti;
        H2(k+1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L2dgm dBt);
    end
end
end
%% Elemen baris ke-3 dari H2%%
d2L2dgm2dgm3i=-((a-3)/a^2)*B(:,2).*B(:,3).*A.^(-2);%
d2L2dgm2dgm3=bb.*d2L2dgm2dgm3i ;H2(3,4)=sum(d2L2dgm2dgm3);
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L2dgm2dBt13i=-((a-3)/a^2)*
            B(:,2)*gm(2*k-1).*D(:,2*k-1).*X(:,v).*A.^(-2);
        d2L2dgm2dBt13=bb.*d2L2dgm2dBt13i;
        H2(3,4+2*(k-1)*v1+v)= sum(d2L2dgm2dBt13);
    end
end
end

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

%% Elemen baris ke-4 dari H2%%
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L2dgm3dBt12i=-((a-3)/a^2)*
            B(:,3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*A.^(-2);
        d2L2dgm3dBt12=bb.*d2L2dgm3dBt12i;
        H2(4,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L2dgm3dBt12);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H2(5:9,5:9)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L2dBt1Bt1i=((a-3)/a^2)*(A-D(:,1))*gm(1)^2.*D(:,1).*
            X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(-2);
        d2L2dBt1Bt1=bb.*d2L2dBt1Bt1i;
        H2(u+4,4+u+v-1)=sum(d2L2dBt1Bt1);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H2(10:14,10:14)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L2dBt2Bt2i=((a-3)/a^2)*(A-D(:,2))*gm(2)^2.*D(:,2).*
            X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(-2);
        d2L2dBt2Bt2=bb.*d2L2dBt2Bt2i;
        H2(4+v1+u,4+v1+u+v-1)=sum(d2L2dBt2Bt2);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H2(15:19,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L2dBt3Bt3i=((a-3)/a^2)*(A-D(:,3))*gm(3)^2.*D(:,3).*
            X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(-2);
        d2L2dBt3Bt3=bb.*d2L2dBt3Bt3i;
        H2(4+2*v1+u,4+2*v1+u+v-1)=sum(d2L2dBt3Bt3);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H2(5:9,10:14)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L2dBt1Bt2i=-((a-3)/a^2)*gm(1)*gm(2)*D(:,1).*D(:,2).*
            X(:,u).*X(:,v).*A.^(-2);
        d2L2dBt1Bt2=bb.*d2L2dBt1Bt2i;
        H2(u+4,4+v1+v)=sum(d2L2dBt1Bt2);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H2(5:9,15:19)%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L2dBt1Bt3i=-((a-
3)/a^2)*gm(1)*gm(3)*D(:,1).*D(:,3).*X(:,u).*X(:,v).*A.^(-2);
        d2L2dBt1Bt3=bb.*d2L2dBt1Bt3i;
        H2(u+4,4+2*v1+v)=sum(d2L2dBt1Bt3);
    end
end

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

%% Elemen Sub matriks H2(10:14,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L2dBt2Bt3i=-((a-3)/a^2)*gm(2)*gm(3)*D(:,2).*D(:,3).*
            X(:,u).*X(:,v).*A.^(-2);
        d2L2dBt2Bt3=bb.*d2L2dBt2Bt3i;
        H2(4+v1+u,4+2*v1+v)=sum(d2L2dBt2Bt3);
    end
end
H2;
%% Membangun matriks Simetri H2%%
for j=1:pr-1
    for i=1:pr-j
        H2(i+j,j)=H2(j,i+j);
    end
end
H2;

%% Matriks H3 %%
H3=zeros(pr,pr);
%% Elemen diagonal utama H3 %%
d2L3daai=-(1/a)*(A.*Ub+(a*U-M).*U).*A.^(a-2); d2L3daa=bb.*d2L3daai;
H3(1,1)=sum(d2L3daa);
for k=1:3
    d2L3dgmkgmki=-(1/a)*(A.*Bb(:,k)+(a-1)*(B(:,k)).^2).*
        A.^(a-2);
    d2L3dgmkgmk=bb.*d2L3dgmkgmki;
    H3(k+1,k+1)=sum(d2L3dgmkgmk);
end
%% Elemen baris ke-1 dari H3%%
for k=1:3
    d2L3dadgmki=(1/a^2)*(gm(k)*A.*Bb(:,k)+a*(a*U-M).*B(:,k)).*
        A.^(a-2);
    d2L3dadgmk=bb.*d2L3dadgmki;
    H3(1,k+1)=sum(d2L3dadgmk);
end
for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L3dadBti=(1/a^2)*(gm(k)*A.*B(:,k)+a*(a*U-M).*D(:,k))*gm(k).*
            X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L3dadBt=bb.*d2L3dadBti;
        H3(1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L3dadBt);
    end
end

%% Elemen baris ke-2 dari H3 %%
for k=1:2
    d2L3dgm1dgm23i=-((a-1)/a)*B(:,1).*B(:,k+1).*A.^(a-2);
    d2L3dgm1dgm23=bb.*d2L3dgm1dgm23i;
    H3(2,2+k)=sum(d2L3dgm1dgm23);
end
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L3dgm1dBt23i=-((a-1)/a)*B(:,1)*gm(k+1).*D(:,k+1).*
            X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L3dgm1dBt23=bb.*d2L3dgm1dBt23i;
        H3(2,4+k*v1+v)=sum(d2L3dgm1dBt23);
    end
end
end

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

for k=1:3
    for v=1:v1
        d2L3dgmdbtai=(D(:,k)-(gm(k)/a)*B(:,k)).*X(:,v).*A.^(a-1);
        d2L3dgmdbtbi=-((a-1)/a)*gm(k)*B(:,k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2L3dgmdbti=d2L3dgmdbtai+d2L3dgmdbtbi;
        d2L3dgmdbt=bb.*d2L3dgmdbti;
        H3(k+1,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L3dgmdbt);
    end
end

%% Elemen baris ke-3 dari H3 %%
d2L3dgm2dgm3i=-((a-1)/a)*B(:,2).*B(:,3).*A.^(a-2);%
d2L3dgm2dgm3=bb.*d2L3dgm2dgm3i; H3(3,4)=sum(d2L3dgm2dgm3);
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L3dgm2dBt13i=-((a-1)/a)*B(:,2)*gm(2*k-1).*D(:,2*k-1).*
            X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L3dgm2dBt13=bb.*d2L3dgm2dBt13i;
        H3(3,4+2*(k-1)*v1+v)=sum(d2L3dgm2dBt13);
    end
end

%% Elemen baris ke-4 dari H3%%
for k=1:2
    for v=1:v1
        d2L3dgm3dBt12i=-((a-1)/a)*B(:,3)*gm(k).*D(:,k).*
            X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L3dgm3dBt12=bb.*d2L3dgm3dBt12i;
        H3(4,4+(k-1)*v1+v)=sum(d2L3dgm3dBt12);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H3(5:9,5:9)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L3dBt1Bt1i=-(1/a)*(A+(a-1)*D(:,1))*gm(1)^2.*D(:,1).*
            X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        d2L3dBt1Bt1=bb.*d2L3dBt1Bt1i;
        H3(u+4,4+u+v-1)=sum(d2L3dBt1Bt1);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H3(10:14,10:14)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L3dBt2Bt2i=-(1/a)*(A+(a-1)*D(:,2))*(gm(2)^2).*D(:,2).*
            X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        d2L3dBt2Bt2=bb.*d2L3dBt2Bt2i;
        H3(4+v1+u,4+v1+u+v-1)=sum(d2L3dBt2Bt2);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H3(15:19,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2L3dBt3Bt3i=-(1/a)*(A+(a-1)*D(:,3))*(gm(3)^2).*D(:,3).*
            X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        d2L3dBt3Bt3=bb.*d2L3dBt3Bt3i;
        H3(4+2*v1+u,4+2*v1+u+v-1)=sum(d2L3dBt3Bt3);
    end
end

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

%% Elemen Sub matriks H3(5:4+v1,5+v1:4+v1+v2)%%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L3dBt1Bt2i=-((a-1)/a)*gm(1)*gm(2)*D(:,1).*D(:,2).*
            X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L3dBt1Bt2=bb.*d2L3dBt1Bt2i;
        H3(u+4,4+v1+v)=sum(d2L3dBt1Bt2);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H3(5:4+v1,5+v1+v2:pr)%%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L3dBt1Bt3i=-((a-1)/a)*gm(1)*gm(3)*D(:,1).*D(:,3).*
            X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L3dBt1Bt3=bb.*d2L3dBt1Bt3i;
        H3(u+4,4+2*v1+v)=sum(d2L3dBt1Bt3);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H3(5+v1:4+v1+v2,5+v1+v2:pr)%%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2L3dBt2Bt3i=-((a-1)/a)*gm(2)*gm(3)*D(:,2).*D(:,3).*
            X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L3dBt2Bt3=bb.*d2L3dBt2Bt3i;
        H3(4+v1+u,4+2*v1+v)=sum(d2L3dBt2Bt3);
    end
end
H3;
%% Membangun matriks Simetri H3 %%
for j=1:pr-1
    for i=1:pr-j
        H3(i+j,j)=H3(j,i+j);
    end
end
H3;

%% Matriks H4 %%
H4=zeros(pr,pr);

%% Entri diagonal utama H4 %%
pz1=6*(a-1)*ones(n,1)-6*(3*a-1)*A.^a+6*a*A.^(2*a);
pz2=6*a^2*A.^(2*a-1)-3*a*(3*a-2)*A.^(a-1); pz3=2*a^3*U.*A.^(2*a-2);
pz4=(P/a).*(a*U-M).*A.^(a-2); pz5=2*pz2+pz3+pz4; pz6=(P/a).*A.^(a-1);

d2Qdadai=pz1+pz5.*U+pz6.*Ub;
d2L4dadai=(d2Qdadai.*Q-dQdai.*dQdai).*Q.^(-2);
d2L4dada=bb.*d2L4dadai;
H4(1,1)=sum(d2L4dada);
rho=2*(a^4)*A.^a+(a-1)*P;

for k=1:3
    d2Qdgmkgmki=(1/a)*(rho.*B(:,k).^2+P.*A.*Bb(:,k)).*
        A.^(a-2);
    d2L4dgmkgmki=(d2Qdgmkgmki.*Q-dQdgmki(:,k).^2).*Q.^(-2);
    d2L4dgmkgmk=bb.*d2L4dgmkgmki;
    H4(k+1,k+1)=sum(d2L4dgmkgmk);
end

```

## Lampiran 9 (lanjutan)

```

%% Elemen baris ke-1 dari H4 %%
for k=1:3
    Vk=(1/a^2)*(gm(k)*A.*B(:,k)+a*(a*U-M).*B(:,k)).*P;
    d2Qdadgmki=-(pz2+pz3).*B(:,k)-Vk.*A.^(a-2);
    d2L4dadgmki=(d2Qdadgmki.*Q-dQdai.*dQdgmki(:,k)).*Q.^(-2);
    d2L4dadgmki=bb.*d2L4dadgmki;
    H4(1,k+1)=sum(d2L4dadgmki);
end
for k=1
    Nk=(1/a^2)*(gm(k)*A.*B(:,k)+a*(a*U-M).*D(:,k)).*P*gm(k);
    for v=1:v1
        %dQdBt1i(:,v)=-P*gm(k).*D(:,k).*(A.^(a-1)).*XY1(:,v);
        d2QdadBt1i=-(pz2+pz3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v)-Nk.*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2L4dadBt1i=(d2QdadBt1i.*Q-dQdai.*dQdBt1i(:,v)).*Q.^(-2);
        d2L4dadBt1i=bb.*d2L4dadBt1i;
        H4(1,4+v)=sum(d2L4dadBt1i);
    end
end
for k=2
    Nk=(1/a^2)*(gm(k)*A.*B(:,k)+a*(a*U-M).*D(:,k)).*P*gm(k);
    for v=1:v1
        d2QdadBt2i=-(pz2+pz3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v)-Nk.*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2L4dadBt2i=(d2QdadBt2i.*Q-dQdai.*dQdBt2i(:,v)).*Q.^(-2);
        d2L4dadBt2i=bb.*d2L4dadBt2i;
        H4(1,4+v1+v)=sum(d2L4dadBt2i);
    end
end
for k=3
    Nk=(1/a^2)*(gm(k)*A.*B(:,k)+a*(a*U-M).*D(:,k)).*P*gm(k);
    for v=1:v1
        %dQdBt3i(:,v)=-P*gm(k).*D(:,k).*(A.^(a-1)).*XY3(:,v);
        d2QdadBt3i=-(pz2+pz3)*gm(k).*D(:,k).*
            X(:,v)-Nk.*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dadBt3i=(d2QdadBt3i.*Q-dQdai.*dQdBt3i(:,v)).*
            Q.^(-2);
        d2L4dadBt3i=bb.*d2L4dadBt3i;
        H4(1,4+2*v1+v)=sum(d2L4dadBt3i);
    end
end
%% Elemen baris ke-2 dari H4 %%
for k=1:2
    d2Qdgm1dgm23i=(1/a)*rho.*B(:,1).*B(:,k+1).*A.^(a-2);
    d2L4dgm1dgm23i=(d2Qdgm1dgm23i.*Q-dQdgmki(:,1).*dQdgmki(:,k+1)).*
        Q.^(-2);
    d2L4dgm1dgm23i=bb.*d2L4dgm1dgm23i;
    H4(2,2+k)=sum(d2L4dgm1dgm23i);
end
for k=1
    for v=1:v1
        d2Qdgm1dBt2i=(1/a)*rho.*B(:,1)*gm(k+1).*
            D(:,k+1).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dgm1dBt2i=(d2Qdgm1dBt2i.*Q-
            dQdgmki(:,1).*dQdBt2i(:,v)).*Q.^(-2);
        d2L4dgm1dBt2i=bb.*d2L4dgm1dBt2i;
        H4(2,4+v1+v)=sum(d2L4dgm1dBt2i);
    end
end

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

for k=2
    for v=1:v1
        d2Qdgm1dBt3i=(1/a)*rho.*B(:,1)*gm(k+1).*D(:,k+1).*
            X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dgm1dBt3i=(d2Qdgm1dBt3i.*Q-dQdgmki(:,1).*dQdBt3i(:,v))
            .*Q.^(-2);
        d2L4dgm1dBt3=bb.*d2L4dgm1dBt3i;
        H4(2,4+2*v1+v)=sum(d2L4dgm1dBt3);
    end
end

for k=1
    for v=1:v1
        d2Qdgm1dBt1ai=(1/a)*rho*gm(k).*B(:,k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2Qdgm1dBt1bi=(1/a)*(gm(k)*B(:,k)-a*D(:,k)).*P.*X(:,v).*
            A.^(a-1);
        d2Qdgm1dBt1i=d2Qdgm1dBt1ai+d2Qdgm1dBt1bi;
        d2L4dgm1dBt1i=(d2Qdgm1dBt1i.*Q-dQdgmki(:,k).*dQdBt1i(:,v))
            .*Q.^(-2);
        d2L4dgm1dBt1=bb.*d2L4dgm1dBt1i;
        H4(k+1,4+v)=sum(d2L4dgm1dBt1);
    end
end

for k=2
    for v=1:v1
        d2Qdgm2dBt2ai=(1/a)*rho*gm(k).*B(:,k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2Qdgm2dBt2bi=(1/a)*(gm(k)*B(:,k)-a*D(:,k)).*P.*X(:,v)
            .*A.^(a-1);
        d2Qdgm2dBt2i=d2Qdgm2dBt2ai+d2Qdgm2dBt2bi;
        d2L4dgm2dBt2i=(d2Qdgm2dBt2i.*Q-dQdgmki(:,k).*dQdBt2i(:,v))
            .*Q.^(-2);
        d2L4dgm2dBt2=bb.*d2L4dgm2dBt2i;
        H4(k+1,4+v1+v)=sum(d2L4dgm2dBt2);
    end
end

for k=3
    for v=1:v1
        d2Qdgm3dBt3ai=(1/a)*rho*gm(k).*B(:,k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2Qdgm3dBt3bi=(1/a)*(gm(k)*B(:,k)-a*D(:,k)).*P.*X(:,v).*
            A.^(a-1);
        d2Qdgm3dBt3i=d2Qdgm3dBt3ai+d2Qdgm3dBt3bi;
        d2L4dgm3dBt3i=(d2Qdgm3dBt3i.*Q-dQdgmki(:,k).*dQdBt3i(:,v))
            .*Q.^(-2);
        d2L4dgm3dBt3=bb.*d2L4dgm3dBt3i;
        H4(k+1,4+2*v1+v)=sum(d2L4dgm3dBt3);
    end
end

%% Elemen baris ke-3 dari H4 %%%
d2Qdgm2dgm3i=(1/a)*rho.*B(:,2).*B(:,3).*A.^(a-2);
d2L4dgm2dgm3i=(d2Qdgm2dgm3i.*Q-dQdgmki(:,2).*dQdgmki(:,3)).*Q.^(-2);
d2L4dgm2dgm3=bb.*d2L4dgm2dgm3i;
H4(3,4)=sum(d2L4dgm2dgm3);

```



## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

for k=1
    for v=1:v1
        d2Qdgm2dBt1i=(1/a)*rho.*B(:,2)*gm(2*k-1).*D(:,2*k-1).*X(:,v)
            .*A.^(a-2);
        d2L4dgm2dBt1i=(d2Qdgm2dBt1i.*Q-dQdgmki(:,2).*dQdBt1i(:,v)).*
            Q.^(-2);
        d2L4dgm2dBt1=bb.*d2L4dgm2dBt1i;
        H4(3,4+v)=sum(d2L4dgm2dBt1);
    end
end

for k=2
    for v=1:v1
        d2Qdgm2dBt3i=(1/a)*rho.*B(:,2)*gm(2*k-1).*D(:,2*k-1).*X(:,v)
            .*A.^(a-2);
        d2L4dgm2dBt3i=(d2Qdgm2dBt3i.*Q-dQdgmki(:,2).*dQdBt3i(:,v)).*
            .*Q.^(-2);
        d2L4dgm2dBt3=bb.*d2L4dgm2dBt3i;
        H4(3,4+2*v1+v)=sum(d2L4dgm2dBt3);
    end
end

%% Elemen pada baris ke-4 dari H3%%

for k=1
    for v=1:v1
        d2Qdgm3dBt1i=(1/a)*rho.*B(:,3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dgm3dBt1i=(d2Qdgm3dBt1i.*Q-dQdgmki(:,3).*dQdBt1i(:,v)).*
            .*Q.^(-2);
        d2L4dgm3dBt1=bb.*d2L4dgm3dBt1i;
        H4(4,4+v)=sum(d2L4dgm3dBt1);
    end
end

for k=2
    for v=1:v1
        d2Qdgm3dBt2i=(1/a)*rho.*B(:,3)*gm(k).*D(:,k).*X(:,v).*
            A.^(a-2);
        d2L4dgm3dBt2i=(d2Qdgm3dBt2i.*Q-dQdgmki(:,3).*dQdBt2i(:,v)).*
            Q.^(-2);
        d2L4dgm3dBt2=bb.*d2L4dgm3dBt2i;
        H4(4,4+v1+v)=sum(d2L4dgm3dBt2);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H4(5:9,5:9)%%

for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2QdBt1dBt1i=(1/a)*(rho.*D(:,1)+P.*A)*gm(1)^2.*D(:,1).*X(:,u).*
            X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        d2L4dBt1dBt1i=(d2QdBt1dBt1i.*Q-dQdBt1i(:,u).*dQdBt1i(:,v+u-1)).*
            .*Q.^(-2);
        d2L4dBt1dBt1=bb.*d2L4dBt1dBt1i;
        H4(u+4,v+u+4-1)=sum(d2L4dBt1dBt1);
    end
end

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

%% Elemen Sub matriks H4(10:14,10:14)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2QdBt2dBt2i=(1/a)*(rho.*D(:,2)+P.*A)*gm(2)^2.*D(:,2).*
            X(:,u).*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        d2L4dBt2dBt2i=(d2QdBt2dBt2i.*Q-dQdBt2i(:,u).*dQdBt2i(:,v+u-1))
            .*Q.^(-2);
        d2L4dBt2dBt2=bb.*d2L4dBt2dBt2i;
        H4(4+v1+u,4+v1+u+v-1)=sum(d2L4dBt2dBt2);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H4(15:19,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1-u+1
        d2QdBt3dBt3i=(1/a)*(rho.*D(:,3)+P.*A)*gm(3)^2.*D(:,3).*X(:,u)
            .*X(:,v+u-1).*A.^(a-2);
        d2L4dBt3dBt3i=(d2QdBt3dBt3i.*Q-dQdBt3i(:,u).*dQdBt3i(:,v+u-1))
            .*Q.^(-2);
        d2L4dBt3dBt3=bb.*d2L4dBt3dBt3i;
        H4(4+2*v1+u,4+2*v1+u+v-1)=sum(d2L4dBt3dBt3);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H4(5:9,10:14)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2QdBt1dBt2i=(1/a)*rho*gm(1).*D(:,1)*gm(2).*D(:,2).*
            X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dBt1dBt2i=(d2QdBt1dBt2i.*Q-dQdBt1i(:,u).*dQdBt2i(:,v))
            .*Q.^(-2);
        d2L4dBt1dBt2=bb.*d2L4dBt1dBt2i;
        H4(u+4,4+v1+v)=sum(d2L4dBt1dBt2);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H4(5:9,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2QdBt1dBt3i=(1/a)*rho*gm(1).*D(:,1)*gm(3).*D(:,3).*X(:,u)
            .*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dBt1dBt3i=(d2QdBt1dBt3i.*Q-dQdBt1i(:,u).*dQdBt3i(:,v))
            .*Q.^(-2);
        d2L4dBt1dBt3=bb.*d2L4dBt1dBt3i;
        H4(u+4,4+2*v1+v)=sum(d2L4dBt1dBt3);
    end
end

%% Elemen Sub matriks H4(10:14,15:19)%%
for u=1:v1
    for v=1:v1
        d2QdBt2dBt3i=(1/a)*rho*gm(2).*D(:,2)*gm(3).*D(:,3).*
            X(:,u).*X(:,v).*A.^(a-2);
        d2L4dBt2dBt3i=(d2QdBt2dBt3i.*Q-dQdBt2i(:,u).*dQdBt3i(:,v))
            .*Q.^(-2);
        d2L4dBt2dBt3=bb.*d2L4dBt2dBt3i;
        H4(4+v1+u,4+2*v1+v)=sum(d2L4dBt2dBt3);
    end
end
H4;

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

%% Membangun matriks Simetri H4%%
for j=1:pr-1
    for i=1:pr-j
        H4(i+j,j)=H4(j,i+j);
    end
end
H4;

%% matriks Hessian H%%
H=H1+H2+H3+H4;
thb=th1-H\g; %% harga vektor tetha baru %%
nrm=norm(thb-th1); %% norm dari selisih tetha baru dan lama %%
if nrm<nr0
    format short
    FI=inv(-H);
    for j=1:pr
        SD(j)=sqrt(FI(j,j));
        Z3(j)=thb(j)/SD(j);
    end
    tetha=thb;
    tetha_Topi(:,lk)=tetha;
    Sd_betha=SD;
    Z_tetha_Topi(:,lk)=Z3';
    Z_betha_Topi(:,lk)=Z_tetha_Topi(5:pr,lk);
    nr(lk)=nrm;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%MSE%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    Bt1Xa=zeros(n,v1); Bt2Xa=zeros(n,v1); Bt3Xa=zeros(n,v1);
    Bt1X=zeros(n,1); Bt2X=zeros(n,1); Bt3X=zeros(n,1);
    a=tetha(1); gm=tetha(2:4); Bt1=tetha(5:4+v1);
    Bt2=tetha(5+v1:4+2*v1);
    Bt3=tetha(5+2*v1:pr);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    for k=1:v1
        Bt1Xa(:,k)=Bt1(k)*X(:,k);
        Bt2Xa(:,k)=Bt2(k)*X(:,k);
        Bt3Xa(:,k)=Bt3(k)*X(:,k);
    end
    for k=1:n
        Bt1X(k)=sum(Bt1Xa(k,:));
        Bt2X(k)=sum(Bt2Xa(k,:));
        Bt3X(k)=sum(Bt3Xa(k,:));
    end
    BtX=[Bt1X,Bt2X,Bt3X];

    D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
    D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
    D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
    D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
    D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
    W=D1+D2+D3;
    Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
    ftopi=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
    LF=log(ftopi);

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Lamba_Topi %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

KE_Lm1=(ones(n,1)*lm1-exp(Bt1X)).^2;
KE_Lm2=(ones(n,1)*lm2-exp(Bt2X)).^2;
KE_Lm3=(ones(n,1)*lm3-exp(Bt3X)).^2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a00=0.718236702285207; gm11=1.135254332873529;
gm22=2.297204462019597; gm33=1.248571148805102;
lm11=36.092586160253951; lm22=4.590411454124541;
lm33=0.277081505445182;
gm=[gm11;gm22;gm33];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D11a=(1/a00)*(gm11/lm11)*(y(:,1)/lm11).^(gm11/a00-1);
D12a=(1/a00)*(gm22/lm22)*(y(:,2)/lm22).^(gm22/a00-1);
D13a=(1/a00)*(gm33/lm33)*(y(:,3)/lm33).^(gm33/a00-1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Wa=(y(:,1)/lm11).^(gm11/a00)+(y(:,2)/lm22).^(gm22/a00)+
(y(:,3)/lm33).^(gm33/a00);
Qa=a00*(a00-1)*(a00-2)*ones(n,1)-3*(a00^2)*(a00-1)*(Wa.^a00)+
(a00^3)*(Wa.^(2*a00));
fa=D11a.*D12a.*D13a.*(exp(-Wa.^a00)).*(Wa.^(a00-3)).*Qa;

KE=(fa-ftopi).^2;
KE_Lokal(lk)= KE(lk);
KE_Lm1_Lokal(:,lk)=KE_Lm1(lk);
KE_Lm2_Lokal(:,lk)=KE_Lm2(lk);
KE_Lm3_Lokal(:,lk)=KE_Lm3(lk);
LF_Lokal(lk)=LF(lk);
break
end
end
if nrm < nr0
    break
end
end
if nrm < nr0
    break
end
end
if nrm < nr0
    break
end
end
if nrm < nr0
    break
end
end
if nrm < nr0
    break
end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

KE_Lm_Lokal=KE_Lm1_Lokal+KE_Lm2_Lokal+KE_Lm3_Lokal;
JKE_Lm_Lokal=sum(KE_Lm_Lokal);
MSE_Lm=1/n*JKE_Lm_Lokal;
nr;
nnrm(1,:)=nr(1:9); nnrm(2,:)=nr(10:18); nnrm(3,:)=nr(19:27);
disp('Penaksiran Parameter Model GWMWR')
disp(sprintf('\n====='))
nrmm_1=nnrm(1,:)
disp(sprintf('\n====='))
tetha_Topi;

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

tetha_Topi;

disp('Penaksir Vektor Parameter Model GMMWR')
disp(sprintf('\n====='))
Tetha_Topi_1_5=tetha_Topi(:,1:5)
Tetha_Topi_6_9=tetha_Topi(:,6:9)
disp(sprintf('\n====='))

Z_tetha_Topi;
Z_betha_Topi;

disp('Nilai Statistik W Penaksir Parameter Regresi Model GMMWR')
disp(sprintf('\n====='))
W_Betha_Topi_1_5=Z_betha_Topi(:,1:5)
W_Betha_Topi_6_9=Z_betha_Topi(:,6:9)

disp(sprintf('\n====='))

Z_Betha_Kuadrat=(Z_betha_Topi).^2;
disp('Nilai Statistik W_kuadrat Penaksir Parameter Regresi Model
GMMWR')

disp(sprintf('\n====='))
W_Betha_Topi_Kuadrat_1_5=Z_Betha_Kuadrat(:,1:5)
W_Betha_Topi_Kuadrat_6_9=Z_Betha_Kuadrat(:,6:9)

disp(sprintf('\n====='))

KE_Lokal; LF_Lokal;
JKE_Lokal=sum(KE_Lokal); JLF_Lokal=sum(LF_Lokal);
bbandwidth=bw';

MSE=(1/n)*sum(KE_Lokal); MSE_Lm;
AIC_Lokal=-2*sum(LF_Lokal)+2*pr
GCV_Lm=n*JKE_Lm_Lokal/(n-pr)^2;
GCV=n*sum(KE_Lokal)/(n-pr)^2;
AIC=AIC_Lokal
BIC=-2*sum(LF_Lokal)+pr*log(n)

disp('Nilai Bandwidth Model GMMWR')
disp(sprintf('\n====='))
Bandwidth_1_9= bbandwidth(1:9)
disp(sprintf('\n====='))

%%%%%%%%Uji Kesesuaian GW%%%%%%%%

LF_Global=xlsread('L_Global_A_3489.xlsx');
Ma=LF_Lokal- LF_Global;
ML=(sqrt(n)/n)*sum(Ma);
MM=ones(n,1)*mean(Ma);
KM=(Ma-MM).^2; VM=sqrt(sum(KM)/n);
Z_Tabel=1.96;
VV=ML/VM

if abs(VV)>Z_Tabel
    Kesimpulan_Uji=1;
else
    Kesimpulan_Uji=0;
end
disp(sprintf('\n====='))

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

disp(sprintf('\n====='))
disp(' VV          Z_Tabel      Kesimpulan_Uji')
disp(sprintf('%5.4f %10.4f %10.4f',VV,Z_Tabel,Kesimpulan_Uji))
disp(sprintf('\n====='))
disp('Ket: 0 = Gagal menolak Ho, 1 = Menolak H0')

%% Uji Serentak GW %%

LF_GWB0=xlsread('L_GW0_GaF.xlsx');
Ma0=LF_Lokal-LF_GWB0;
ML0=(sqrt(n)/n)*sum(Ma0);
MM0=ones(n,1)*mean(Ma0);
KM0=(Ma0-MM0).^2; VM0=sqrt(sum(KM0)/n);
VV0=ML0/VM0
if abs(VV0)>Z_Tabel
    Kesimpulan_Uji=1;
else
    Kesimpulan_Uji=0;
end

disp('Nilai Statistik VV0 dan Z_Tabel Pada Pengujian Serentak Model GWMWR')
disp(sprintf('\n====='))
disp(' VV0          Z_Tabel      Kesimpulan_Uji')
disp(sprintf('%5.4f %10.4f %10.4f',VV0,Z_Tabel,Kesimpulan_Uji))
disp(sprintf('\n====='))
disp('Ket: 0 = Gagal menolak Ho, 1 = Menolak H0')

disp('Nilai AIC dan BIC')
disp(sprintf('\n====='))
disp('AIC          BIC')
disp(sprintf('%5.15f % 10.15f',AIC,BIC))
disp(sprintf('\n====='))

%%%%%%%%%% RATIO Fungsi Survival %%%%%%%%%%%

ORf=zeros(1,4);ORs=zeros(1,4);ORLm1=zeros(1,4);ORLm2=zeros(1,4);
ORLm3=zeros(1,4);
h=0.1; r=5;

tetha_A=tetha_Topi(:,r);
a=tetha_A(1); gm=tetha_A(2:4);Bt1=tetha_A(5:4+v1);
Bt2=tetha_A(5+v1:4+2*v1);
Bt3=tetha_A(5+2*v1:pr);

for k=1
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*
X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*
X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*
X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);

%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi=exp(-W.^a);
Lm1_Topi=exp(Bt1X);Lm2_Topi=exp(Bt2X);Lm3_Topi=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*(X(:,2)+h)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*(X(:,2)+h)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*(X(:,2)+h)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^(gm(1)/a-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^(gm(2)/a-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^(gm(3)/a-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^(gm(1)/a).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^(gm(2)/a).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^(gm(3)/a).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi_h=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi_h=exp(-W.^a);
Lm1_Topi_h=exp(Bt1X);Lm2_Topi_h=exp(Bt2X);Lm3_Topi_h=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format short
Orfl=ftopi_h./ftopi;
Orsl=S_Topi_h./S_Topi;
ORf(k)=Orfl(r);ORs(k)=Orsl(r);
ORLm11=Lm1_Topi_h./Lm1_Topi; ORLm1(k)=ORLm11(r);
ORLm21=Lm2_Topi_h./Lm2_Topi; ORLm2(k)=ORLm21(r);
ORLm31=Lm3_Topi_h./Lm3_Topi; ORLm3(k)=ORLm31(r);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=2
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^(gm(1)/a-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^(gm(2)/a-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^(gm(3)/a-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^(gm(1)/a).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^(gm(2)/a).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^(gm(3)/a).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi=exp(-W.^a);
Lm1_Topi=exp(Bt1X);Lm2_Topi=exp(Bt2X);Lm3_Topi=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*(X(:,3)+h)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*(X(:,3)+h)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*(X(:,3)+h)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*X(:,5);

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi_h=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi_h=exp(-W.^a);
Lm1_Topi_h=exp(Bt1X);Lm2_Topi_h=exp(Bt2X);Lm3_Topi_h=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format short
Orf2=ftopi_h./ftopi;
Ors2=S_Topi_h./S_Topi;
ORf(k)=Orf2(r);ORs(k)=Ors2(r);
ORLm12=Lm1_Topi_h./Lm1_Topi; ORLm1(k)=ORLm12(r);
ORLm22=Lm2_Topi_h./Lm2_Topi; ORLm2(k)=ORLm22(r);
ORLm32=Lm3_Topi_h./Lm3_Topi; ORLm3(k)=ORLm32(r);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=3
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*
X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*
X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*
X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi=exp(-W.^a);
Lm1_Topi=exp(Bt1X);Lm2_Topi=exp(Bt2X);Lm3_Topi=exp(Bt3X);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*(X(:,4)+h)+Bt1
(5)*X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*(X(:,4)+h)+Bt2
(5)*X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*(X(:,4)+h)+Bt3
(5)*X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;

```



## Lampiran 9 (Lanjutan)

```

Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi_h=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi_h=exp(-W.^a);
Lm1_Topi_h=exp(Bt1X);Lm2_Topi_h=exp(Bt2X);Lm3_Topi_h=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

format short
Orf3=ftopi_h./ftopi;
Ors3=S_Topi_h./S_Topi;
ORf(k)=Orf3(r);ORs(k)=Ors3(r);
ORLm13=Lm1_Topi_h./Lm1_Topi; ORLm1(k)=ORLm13(r);
ORLm23=Lm2_Topi_h./Lm2_Topi; ORLm2(k)=ORLm23(r);
ORLm33=Lm3_Topi_h./Lm3_Topi; ORLm3(k)=ORLm33(r);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for k=4
Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*
X(:,5);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*
X(:,5);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*
X(:,5);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;

Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi=exp(-W.^a);
Lm1_Topi=exp(Bt1X);Lm2_Topi=exp(Bt2X);Lm3_Topi=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Bt1X=Bt1(1)*X(:,1)+Bt1(2)*X(:,2)+Bt1(3)*X(:,3)+Bt1(4)*X(:,4)+Bt1(5)*
(X(:,5)+h);
Bt2X=Bt2(1)*X(:,1)+Bt2(2)*X(:,2)+Bt2(3)*X(:,3)+Bt2(4)*X(:,4)+Bt2(5)*
(X(:,5)+h);
Bt3X=Bt3(1)*X(:,1)+Bt3(2)*X(:,2)+Bt3(3)*X(:,3)+Bt3(4)*X(:,4)+Bt3(5)*
(X(:,5)+h);
D11=(gm(1)/a)*(y(:,1).^((gm(1)/a)-1)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D12=(gm(2)/a)*(y(:,2).^((gm(2)/a)-1)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D13=(gm(3)/a)*(y(:,3).^((gm(3)/a)-1)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

D1=y(:,1).^((gm(1)/a)).*exp(-(gm(1)/a)*Bt1X);
D2=y(:,2).^((gm(2)/a)).*exp(-(gm(2)/a)*Bt2X);
D3=y(:,3).^((gm(3)/a)).*exp(-(gm(3)/a)*Bt3X);
W=D1+D2+D3;

Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*(a^2)*(a-1)*(W.^a)+(a^3)*(W.^(2*a));
ftopi_h=D11.*D12.*D13.*(exp(-W.^a)).*(W.^(a-3)).*Q;
S_Topi_h=exp(-W.^a);
Lm1_Topi_h=exp(Bt1X);Lm2_Topi_h=exp(Bt2X);Lm3_Topi_h=exp(Bt3X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

## Lampiran 9 (Lanjutan)

```
format short
Orf4=ftopi_h./ftopi;
Ors4=S_Topi_h./S_Topi;
ORf(k)=Orf4(r);ORs(k)=Ors4(r);
ORLm14=Lm1_Topi_h./Lm1_Topi; ORLm1(k)=ORLm14(r);
ORLm24=Lm2_Topi_h./Lm2_Topi; ORLm2(k)=ORLm24(r);
ORLm34=Lm3_Topi_h./Lm3_Topi; ORLm3(k)=ORLm34(r);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%ORs=[Ors1(r),Ors2(r),Ors3(r),Ors4(r)];
disp('Odds Ratio Untuk Parameter Skala: ORLm1, ORLm2,ORLm3')
disp(sprintf('\n====='))
ORLm1
ORLm2
ORLm3
disp(sprintf('\n====='))
disp('Odds Ratio Untuk FKP (ORf) dan Fungsi Survival (ORs)')
disp(sprintf('\n====='))
ORf
ORs
disp(sprintf('\n====='))
```

## Lampiran 10

### Program Matlab penaksiran parameter distribusi Weibull trivariat

```

clc; clear all;
ya=xlsread('y_data.xlsx');
y1=ya(:,1);y2=ya(:,2);y3=ya(:,3); y=[y1,y2,y3];
n=27; m=3; %%n=ukuran sampel; m=banyaknya variat %%
LnyLm=zeros(n,3);D=zeros(n,3); B=zeros(n,3); Bb=zeros(n,3);
nr0=10^(-12); Iterasi_Max=5000;
gm10=2;gm20=1; gm30=2; lm10=7;lm20=37;lm30=4; %%Nilai awal %%
a1=0.54:0.01:1.0;
m1=length(a1);
for j=1:m1
    a0=a1(j);
    thb0=[a0;gm10;gm20;gm30;lm10;lm20;lm30]; %%Nilai awalParameter %
    thb=thb0;
for q=1:Iterasi_Max %%Proses Iterasi NR %%
    q
    thl=thb;%% thl=tetha lama dan thb=tetha baru %%%
    a=thl(1);
    gm1=thl(2);gm2=thl(3);gm3=thl(4);
    lm1=thl(5);lm2=thl(6);lm3=thl(7);
    gm=[gm1;gm2;gm3]; lm=[lm1;lm2;lm3];
    for k=1:3
        LnyLm(:,k)=log(y(:,k))-log(lm(k));
        D(:,k)=(y(:,k)/lm(k)).^(gm(k)/a);
        B(:,k)=D(:,k).* LnyLm(:,k);
        Bb(:,k)=B(:,k).*LnyLm(:,k);
    end
    %% Menentukan Vektor g1 %%
    g1=zeros(7,1);
    gmLnyLm=gm(1)*LnyLm(:,1)+gm(2)*LnyLm(:,2)+gm(3)*LnyLm(:,3);
    dL1dai=(-m/a)*ones(n,1)-(1/a^2)*gmLnyLm;
    g1(1)=sum(dL1dai);
    for k=1:3
        dL1dgmi=ones(n,1)/gm(k)+(1/a)*LnyLm(:,k);
        dL1dgm=sum(dL1dgmi); g1(k+1)=dL1dgm;%%TP L1 thd gama 1,2,3%%
        dL1dlmi=-ones(n,1)*gm(k)/(a*lm(k));
        dL1dlm=sum(dL1dlmi); g1(k+4)=dL1dlm;%%TP L1 thd lamda 1,2,3%%
    end ; g1;
    %%Menentukan Vektor g2 %%
    g2=zeros(7,1);
    A=D(:,1)+D(:,2)+D(:,3);
    M=(1/a)*(gm(1)*B(:,1)+gm(2)*B(:,2)+gm(3)*B(:,3));
    U=A.*log(A)-M;
    dL2dai=(1/a)*(a*U+m*M)./A; dL2da=sum(dL2dai);
    g2(1)=dL2da;%% TP L2 thd a%%
    for k=1:3
        dL2dgmi=((a-m)/a)*B(:,k)./A; dL2dgm=sum(dL2dgmi);
        dL2dlmi=-((a-m)/a)*(gm(k)/lm(k))*D(:,k)./A;
        dL2dlm=sum(dL2dlmi); g2(k+1)=dL2dgm; g2(k+4)=dL2dlm;
    end; g2;
    %% Vektor g3 %%
    g3=zeros(7,1);
    dL3dai=-U.*(A.^(a-1)); g3(1)=sum(dL3dai);
    for k=1:3
        dL3dgmi=-B(:,k).*(A.^(a-1));
        dL3dgm=sum(dL3dgmi); g3(k+1)=dL3dgm;
        dL3dlmi=(gm(k)/lm(k))*D(:,k).*(A.^(a-1));
        dL3dlm=sum(dL3dlmi); g3(k+4)=dL3dlm;
    end

```

## Lampiran 10 (Lanjutan)

```

%% Vektor g4 %%
g4=zeros(7,1);
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*a^2*(a-1)*(A.^a)+a^3*(A.^(2*a));
K=3*((a-1)^2*ones(n,1)-a*(3*a-2)*(A.^a)+a^2*(A.^(2*a)))-ones(n,1);
p=2*a^3*(A.^a)-3*a^2*(a-1)*ones(n,1);
dQdai=K+p.*U.*(A.^(a-1));
dL4da=dQdai./Q; g4(1)=sum(dL4da);
dQdgm=zeros(n,3); dQdlmi=zeros(n,3);
for k=1:3
    dQdgm(:,k)=p.*B(:,k).*(A.^(a-1));
    dL4dgm(:,k)=dQdgm(:,k)./Q;
    dL4dgm(k)=sum(dL4dgm(:,k)); g4(k+1)=dL4dgm(k);
    dQdlmi(:,k)=-p*(gm(k)/lm(k)).*D(:,k).*(A.^(a-1));
    dL4dlmi(:,k)=dQdlmi(:,k)./Q;
    dL4dlm(k)=sum(dL4dlmi(:,k)); g4(k+4)=dL4dlm(k);
end; g4;
g=g1+g2+g3+g4; %% Vektor Gradien g %%

%% Matriks H1 %%
H1=zeros(7,7);
d2L1daai=ones(n,1)*(m/a^2)+(2/a^3)*gmLnyLm;
d2L1daa=sum(d2L1daai); H1(1,1)=d2L1daa;
for k=1:3
    d2L1dgmghi=-ones(n,1)/((gm(k))^2);
    d2L1dgmghm=sum(d2L1dgmghi); H1(k+1,k+1)=d2L1dgmghm;
    d2L1dlmlmi=ones(n,1)*gm(k)/(a*(lm(k))^2);
    d2L1dlmlm=sum(d2L1dlmlmi); H1(k+4,k+4)=d2L1dlmlm;
end
%% Elemen baris pertama H1 %%
for k=1:3
    d2L1dadghi=-(1/a^2)*LnyLm(:,k);
    d2L1dadghm=sum(d2L1dadghi); H1(1,k+1)=d2L1dadghm;
    d2L1dadlmi=ones(n,1)*gm(k)/(a^2*lm(k));
    d2L1dadlmlm=sum(d2L1dadlmi); H1(1,k+4)=d2L1dadlmlm;
end; H1; %%mengecek H1%%
%% Elemen H1(2,5); H(3,6); H(4,7) %%
for k=1:3
    d2L1dgmghlmi=-ones(n,1)/(a*lm(k));
    d2L1dgmghlmlm=sum(d2L1dgmghlmi); H1(k+1,k+4)=d2L1dgmghlmlm;
end
%% Membentuk matriks Simetri H1 %%
for k=1:6
    H1(k+1:7,k)=H1(k,k+1:7)';
end; H1;

%% Matriks H2 %%
H2=zeros(7,7);
Mb=(gm(1)^2*LnyLm(:,1).*B(:,1)+gm(2)^2*LnyLm(:,2).*B(:,2)+
    gm(3)^2*LnyLm(:,3).*B(:,3))/(a^2);
d2L2daai=(1/a^2)*((a-m)*Mb./A-(a-m)*(M.^2)./(A.^2)-2*m*M./A);
d2L2ddaa=sum(d2L2daai); H2(1,1)=d2L2ddaa;
for k=1:3
    d2L2dgmghi=(a-m)/a^2*(Bb(:,k)./A-(B(:,k).^2)./(A.^2));
    d2L2dgmghm=sum(d2L2dgmghi); H2(k+1,k+1)=d2L2dgmghm;
    d2L2dlmlmia=(a-m)/a*(
        gm(k)/(lm(k)^2)+(1/a)*(gm(k)/lm(k))^2*D(:,k)./A;
    d2L2dlmlmib=-((a-m)/a^2)*(gm(k)/lm(k))^2*(D(:,k).^2)./(A.^2);
    d2L2dlmlmi=d2L2dlmlmia+d2L2dlmlmib;
    d2L2dlmlmlm=sum(d2L2dlmlmi); H2(k+4,k+4)=d2L2dlmlmlm;
end; H2;

```

## Lampiran 10 (Lanjutan)

```

%% Baris Pertama H2 %%
for k=1:3
    d2L2dadgmi=(1/a^2)*(m*B(:,k)./A)+
        (a-3)/(a^2)*(B(:,k).*M./(A.^2)-(gm(k)/a)*Bb(:,k)./A));
    d2L2dadgm=sum(d2L2dadgmi); H2(1,k+1)=d2L2dadgm
    d2L2alma=(-m/a^2)*(gm(k)/lm(k))*D(:,k)./A;
    d2L2almb=((a-m)/a^2)*(gm(k)/lm(k))*
        ((gm(k)/a)*B(:,k)./A-D(:,k).*M./(A.^2));
    d2L2dadlmi=d2L2alma+d2L2almb; d2L2dadlm=sum(d2L2dadlmi);
    H2(1,k+4)=d2L2dadlm;%%TP O2 L2 thd a dan lamda 1,2,3%
end; H2;

%% Baris Kedua H2 %%
for k=1:2
    d2L2dgm1dgm23i=-((a-m)/a^2)*B(:,1).*B(:,(k+1))./(A.^2);
    d2L2dgm1dgm23=sum(d2L2dgm1dgm23i); H2(2,k+2)=d2L2dgm1dgm23;
end; H2;
for k=1:3
    d2L2gmk1mka=- (a-m)/a^2*(gm(k)/lm(k))*B(:,k).*(A-
        D(:,k))./(A.^2);
    d2L2gmk1mkb=- (a-m)/a*(1/lm(k))*D(:,k)./A;
    d2L2dgm1dmi=d2L2gmk1mka+d2L2gmk1mkb;
    d2L2dgm1dmi=sum(d2L2dgm1dmi); H2(k+1,k+4)=d2L2dgm1dmi;
end ;H2;
for k=1:2
    d2L2dgm1dmi23i=(a-m)/a^2*(gm(k+1)/lm(k+1))*
        D(:,(k+1)).*B(:,1)./(A.^2);
    d2L2dgm1dmi23=sum(d2L2dgm1dmi23i); H2(2,k+5)=d2L2dgm1dmi23;
end; H2;

%% Baris Ke-3 H2 %%
for k=1
    d2L2dgm2dgm3i=- (a-m)/a^2*B(:,k+2).*B(:,2)./(A.^2);
    d2L2dgm2dgm3=sum(d2L2dgm2dgm3i); H2(3,k+3)=d2L2dgm2dgm3;
end
for k=1:2
    d2L2dgm2dmi13i=(a-m)/a^2*(gm(2*k-1)/lm(2*k-1))*
        D(:,(2*k-1)).*B(:,2)./(A.^2);
    d2L2dgm2dmi13=sum(d2L2dgm2dmi13i); H2(3,2*k+3)=d2L2dgm2dmi13;
end ; H2;

%% Baris Ke-4 H2 %%
for k=1:2
    d2L2dgm3dmi12i=(a-3)/a^2*
        (gm(k)/lm(k))*D(:,k).*B(:,3)./(A.^2);
    d2L2dgm3dmi12=sum(d2L2dgm3dmi12i); H2(4,k+4)=d2L2dgm3dmi12;
end; H2;

%% Baris Ke-5 H2 %%
for k=1:2
    d2L2dmi1dmi23i=- (a-3)/a^2*gm(1)/lm(1)*
        D(:,1)*gm(k+1)/lm(k+1).*D(:,(k+1))./(A.^2);
    d2L2dmi1dmi23=sum(d2L2dmi1dmi23i); H2(5,k+5)=d2L2dmi1dmi23;
end; H2;

%% Baris ke-6 H2 %%
for k=1
    d2L2dmi2dmi3i=- (a-m)/a^2*gm(2)/lm(2)*D(:,2)*gm(k+2)/lm(k+2).*
        D(:,k+2)./(A.^2);
    d2L2dmi2dmi3=sum(d2L2dmi2dmi3i); H2(6,k+6)=d2L2dmi2dmi3;
end

```

## Lampiran 10 (Lanjutan)

```

%% Membentuk matriks Simetri H2 %%%
for k=1:6
    H2(k+1:7,k)=H2(k,k+1:7)';
end; H2;

%% Matriks H3 %%
H3=zeros(7,7);
Ub=M.*log(A)-Mb; %% Persamaan (4.4c) %%
d2L3daai=1/a*(Ub.*A-(a*U+M).*U).*(A.^(a-2));
H3(1,1)=sum(d2L3daai);
for k=1:3 % Elemen diagonal utama%%%
    d2L3dgmDgmI=- (1/a)*(Bb(:,k).*A+(a-1)*(B(:,k).^2)).*(A.^(a-2));
    d2L3dgmDgm= sum(d2L3dgmDgmI); H3(k+1,k+1)= d2L3dgmDgm;
    d2L3lmlma=-gm(k)/(lm(k)^2)*D(:,k).*(A.^(a-1))-
        1/a*(gm(k)/lm(k))^2*D(:,k).*(A.^(a-1));
    d2L3lmlmb=-((a-1)/a)*(gm(k)/lm(k))^2*(D(:,k).^2).*(A.^(a-2));
    d2L3dlmdlmi=d2L3lmlma+d2L3lmlmb;
    d2L3dlmdlmlm= sum(d2L3dlmdlmi); H3(k+4,k+4)=d2L3dlmdlmlm;
end
%% Baris ke-1 dari H3 %%
for k=1:3
    d2L3dadgmI=1/a^2*(gm(k)*A.*Bb(:,k)-
        a*(a*U+M).*B(:,k)).*(A.^(a-2));
    d2L3dadgm= sum(d2L3dadgmI); H3(1,k+1)=d2L3dadgm;
    d2L3dadlmi=1/a^2*(a*(a*U+M).*D(:,k)-gm(k)*A.*B(:,k)).*
        (gm(k)/lm(k)).*(A.^(a-2));
    d2L3dadlmlm= sum(d2L3dadlmi); H3(1,k+4)=d2L3dadlmlm;
end
H3;
%% Baris ke-2 dari H3 %%
for k=1:2
    d2L3dgm1dgm23i=-((a-1)/a)*B(:,1).*B(:,k+1)).*(A.^(a-2));
    d2L3dgm1dgm23= sum(d2L3dgm1dgm23i); H3(2,k+2)=d2L3dgm1dgm23;
    g2L3dgm1dlm23i=(a-1)/a*B(:,1)*(gm(k+1)/lm(k+1)).*
        D(:,k+1)).*(A.^(a-2));
    g2L3dgm1dlm23= sum(g2L3dgm1dlm23i); H3(2,k+5)=g2L3dgm1dlm23;
end; H3;
for k=1:3
    d2L3gmklmka=(1/lm(k))*D(:,k).*(A.^(a-1));
    d2L3gmklmkb=(1/a)*(gm(k)/lm(k))*(B(:,k).*A.^(a-1)+
        (a-1)*D(:,k).*B(:,k)).*(A.^(a-2));
    d2L3dgm1dlmi=d2L3gmklmka+d2L3gmklmkb;
    d2L3dgm1dlmlm= sum(d2L3dgm1dlmi); H3(k+1,k+4)=d2L3dgm1dlmlm;
end; H3;
%% Baris Ke-3 dari H3 %%
d2L3dgm2dgm3i=- (a-1)/a*B(:,2).*B(:,3)).*(A.^(a-2));
d2L3dgm2dgm3= sum(d2L3dgm2dgm3i); H3(3,4)=d2L3dgm2dgm3;
for k=1:2
    d2L3dgm2dlm13i=((a-1)/a)*(gm(2*k-1)/lm(2*k-1))*
        D(:,2*k-1)).*B(:,2)).*(A.^(a-2));
    d2L3dgm2dlm13= sum(d2L3dgm2dlm13i); H3(3,2*k+3)=d2L3dgm2dlm13;
end; H3;

%% Baris Ke-4 dari H3 %%
for k=1:2
    d2L3dgm3dlm12i=(a-1)/a*(gm(k)/lm(k))*D(:,k).*B(:,3)).*
        (A.^(a-2));
    d2L3dgm3dlm12= sum(d2L3dgm3dlm12i); H3(4,k+4)=d2L3dgm3dlm12;
end; H3;

```

## Lampiran 10 (Lanjutan)

```

%% Baris Ke-5 dari H3 %%
for k=1:2
    d2L3dlm1dlm23i=-(a-1)/a*gm(1)/lm(1)*D(:,1)*gm(k+1)/lm(k+1).*
        D(:,(k+1)).*(A.^(a-2));
    d2L3dlm1dlm23=sum(d2L3dlm1dlm23i); H3(5,k+5)=d2L3dlm1dlm23;
end; H3;
%% Baris ke-6 dari H3 %%
for k=1
    d2L3dlm2dlm3i=-(a-1)/a*gm(2)/lm(2)*D(:,2)*gm(k+2)/lm(k+2).*
        D(:,k+2)).*(A.^(a-2));
    d2L3dlm2dlm3=sum(d2L3dlm2dlm3i); H3(6,6+k)=d2L3dlm2dlm3;
end; H3;
%% Membentuk matriks Simetri H3 %%
for k=1:6
    H3(k+1:7,k)=H3(k,k+1:7)';
end; H3;

%% Matriks H4 %%
H4=zeros(7,7);
pz1=ones(n,1)*6*(a-1)+6*a*A.^(2*a)-6*(3*a-1)*(A.^a);
pz2=6*a^2*A.^(2*a-1)-3*a*(3*a-2)*A.^(a-1);
pz3=2*a^3*A.^(2*a-2).*U;
pz4=(p/a).*(a*U+M).*A.^(a-2); pz5=2*pz2+pz3+pz4;
pz6=-(p/a).*A.^(a-1);
Q=a*(a-1)*(a-2)*ones(n,1)-3*a^2*(a-1)*(A.^a)+a^3*A.^(2*a);
d2Qdaai=pz1+pz5.*U+pz6.*Ub;
rho=2*a^4*(A.^a)+(a-1)*p;
d2L4daai=(d2Qdaai.*Q-dQdai.^2)./(Q.^2); d2L4daa=sum(d2L4daai);
H4(1,1)=d2L4daa;

%% Elemen diagonal utama H4 %%
for k=1:3 % Elemen diagonal utama %%
    d2Qdgmgi=(1/a)*(rho.*(B(:,k).^2)+p.*A.*Bb(:,k)).*(A.^(a-2)));
    d2L4dgmgi=(d2Qdgmgi.*Q-(dQdgmgi(:,k)).^2)./(Q.^2);
    d2L4dgmgi=sum(d2L4dgmgi); H4(k+1,k+1)=d2L4dgmgi;
    d2Qdlmli=(1/a)*(rho*gm(k).*D(:,k)+(a+gm(k)).*p.*A.*
        (gm(k)/(lm(k)^2)).*D(:,k)).*A.^(a-2);
    d2L4dlmli=(d2Qdlmli.*Q-(dQdlmli(:,k)).^2)./(Q.^2);
    d2L4dlmli=sum(d2L4dlmli); H4(k+4,k+4)=d2L4dlmli;
end
%% Baris ke-1 dari H4 %%
for k=1:3
    V=(1/a^2)*(a*(a*U+M).*B(:,k)-gm(k)*Bb(:,k)).*A).*p;
    d2Qdadgmi=(pz2+pz3).*B(:,k)+V.*A.^(a-2);
    d2L4dadgmi=(d2Qdadgmi.*Q-dQdai.*dQdgmgi(:,k))./(Q.^2);
    d2L4dadgm=sum(d2L4dadgmi); H4(1,k+1)=d2L4dadgm;
    N=(1/a^2)*(gm(k)*A.*B(:,k)-a*(a*U+M).*D(:,k)).*
        p*(gm(k)/lm(k));
    d2Qdadlmi=N.*A.^(a-2)-(pz2+pz3)*(gm(k)/lm(k)).*D(:,k);
    d2L4dadlmi=(d2Qdadlmi.*Q-dQdai.*dQdlmli(:,k))./(Q.^2);
    d2L4dadlm=sum(d2L4dadlmi); H4(1,k+4)=d2L4dadlm;
end; H4;
%% Baris ke-2 dari H4 %%
for k=1:3
    delta=(1/a)*(a/lm(k)*D(:,k)+(gm(k)/lm(k)).*B(:,k)).*p;
    d2Qdgmli=-(delta.*A+(rho/a)*(gm(k)/lm(k)).*
        B(:,k)).*D(:,k)).*(A.^(a-2));
    d2L4dgmli=(d2Qdgmli.*Q-dQdgmli(:,k)).*dQdlmli(:,k))./(Q.^2);
    d2L4dgmli=sum(d2L4dgmli); H4(k+1,k+4)=d2L4dgmli;
end; H4;

```

## Lampiran 10 (Lanjutan)

```

for k=1:2
    d2Qdgm1dgm23i=(1/a)*rho.*B(:,1).*B(:,k+1).*(A.^(a-2));
    d2L4dgm1dgm23i=(d2Qdgm1dgm23i.*Q-dQdgm1(:,1).*dQdgm1(:,k+1))
        ./ (Q.^2);
    d2L4dgm1dgm23=sum(d2L4dgm1dgm23i); H4(2,k+2)=d2L4dgm1dgm23;
    d2Qdgm1dlm23i=-(1/a)*rho*(gm(k+1)/lm(k+1)).*B(:,1).*
        D(:,k+1).*(A.^(a-2));
    d2L4dgm1dlm23i=(d2Qdgm1dlm23i.*Q-dQdgm1(:,1).*dQdlm1(:,k+1))
        ./ (Q.^2);
    d2L4dgm1dlm23=sum(d2L4dgm1dlm23i); H4(2,k+5)=d2L4dgm1dlm23;
end; H4;

%% Baris ke-3 dari H4 %%
for k=1
    d2Qdgm2dgm3i=(1/a)*rho.*B(:,k+1).*B(:,k+2).*(A.^(a-2));
    d2L4dgm2dgm3i=(d2Qdgm2dgm3i.*Q-dQdgm1(:,k+1).*dQdgm1(:,k+2))
        ./ (Q.^2);
    d2L4dgm2dgm3=sum(d2L4dgm2dgm3i); H4(3,k+3)=d2L4dgm2dgm3;
end; H4;
for k=1:2
    d2Qdgm2dlm13i=-(1/a)*rho*(gm(2*k-1)/lm(2*k-1)).*
        B(:,2).*D(:,2*k-1).*(A.^(a-2));
    d2L4dgm2dlm13i=(d2Qdgm2dlm13i./Q)-
        (dQdgm1(:,2).*dQdlm1(:,2*k-1))./(Q.^2);
    d2L4dgm2dlm13=sum(d2L4dgm2dlm13i); H4(3,2*k+3)=d2L4dgm2dlm13;
end; H4;

%% Baris ke-4 dari H4 %%
for k=1:2
    d2Qdgm3dlm12i=-1/a*rho*(gm(k)/lm(k)).*B(:,3).*D(:,k).*
        (A.^(a-2));
    d2L4dgm3dlm12i=(d2Qdgm3dlm12i.*Q-dQdgm1(:,3).*dQdlm1(:,k))./(
        Q.^2);
    d2L4dgm3dlm12=sum(d2L4dgm3dlm12i); H4(4,k+4)=d2L4dgm3dlm12;
end; H4;

%% Baris ke-5 dari H4 %%
for k=1:2
    d2Qdlm1dlm23i=(1/a)*rho*(gm(1)/lm(1)).*(gm(k+1)/lm(k+1)).*
        D(:,1).*D(:,k+1).*(A.^(a-2));
    d2L4dlm1dlm23i=(d2Qdlm1dlm23i.*Q-
        dQdlm1(:,1).*dQdlm1(:,k+1))./(Q.^2);
    d2L4dlm1dlm23=sum(d2L4dlm1dlm23i); H4(5,k+5)=d2L4dlm1dlm23;
end; H4;

%% Baris ke-6 dari H4 %%
for k=1
    d2Qdlm2dlm3i=1/a*rho*(gm(2)/lm(2)).*(gm(k+2)/lm(k+2)).*
        D(:,2).*D(:,k+2).*(A.^(a-2));
    d2L4dlm2dlm3i=(d2Qdlm2dlm3i.*Q-dQdlm1(:,2).*dQdlm1(:,k+2))./(
        Q.^2);
    d2L4dlm2dlm3=sum(d2L4dlm2dlm3i); H4(6,k+6)=d2L4dlm2dlm3;
end

%% Membentuk matriks Simetri H4 %%%
for k=1:6
    H4(k+1:7,k)=H4(k,k+1:7)';
end
H=H1+H2+H3+H4; H; %% Matriks Hessian %%

```



## Lampiran 10 (Lanjutan)

```
thb=thl-H\g;      %% thb =tetha baru, thl=tetha lama %%
if thb(1)>1
    thb(1)=thl(1);
end
if thb(1)>0
if thb(1)<1
    if thb(2)>0
        if thb(3)>0
            if thb(4)>0
                if thb(5)>0
                    if thb(6)>0
                        if thb(7)>0
                            format short
                            nr=norm(thb-thl);
                            if nr<=nr0
                                CC='CETAK_HASIL'
                                q
                                nr
                                thb0
                                tetha=thl
                                break
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end
nr=norm(thb-thl);
if nr<nr0
    break
end
end
tetha;

disp('Parameter FKP Distribusi Weibull Trivariat f(y1,y2,y3)')
disp(sprintf('\n====='))
disp('a          gm1          gm2          gm3          lm1          lm2
lm3')
disp(sprintf('%5.5f %9.5f %9.5f %9.5f %9.5f %9.5f %9.5f',
tetha(1),tetha(2),tetha(3),tetha(4),tetha(5),tetha(6),tetha(7)))
disp(sprintf('\n====='))
```

## Lampiran 11

Penghitungan komponen vektor gradien dan elemen matriks Hessian pada penaksiran parameter model distribusi Weibull trivariat

Berdasarkan fungsi log-likelihood pada persamaan (4.3), maka turunan parsial orde pertama dan orde kedua dari fungsi  $L(\boldsymbol{\theta}_0)$  terhadap semua komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$  ditentukan per bagian sebagai berikut :

- Bagian pertama

$$L_1(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\ln \gamma_k - \ln a - \ln \lambda_k + (\frac{\gamma_k}{a} - 1)(\ln y_{ki} - \ln \lambda_k)) .$$

Turunan parsial orde pertama dari  $L_1(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})$  terhadap semua komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$  adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{(a). } \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a} &= -\frac{mn}{a} - \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \gamma_k \ln \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right) \\ \text{(b). } \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k} &= \frac{n}{\gamma_k} + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m \\ \text{(c). } \frac{\partial L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k} &= -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Turunan parsial orde kedua dari  $L_1(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})$  terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$  adalah sebagai berikut :

Untuk  $k = 1, 2, \dots, m$  dan  $l = 1, 2, \dots, m$  maka :

$$\begin{aligned} \text{(a). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a^2} &= \frac{mn}{a^2} + \frac{2}{a^3} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \gamma_k \ln \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right) \quad \text{(b). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k^2} = -\frac{n}{\gamma_k^2}, \\ \text{(c). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k^2} &= \frac{n}{a} \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k^2} \right) \quad \text{(d). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \gamma_k} = -\frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n (\ln y_{ki} - \ln \lambda_k) \\ \text{(e). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \lambda_k} &= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \quad \text{(f). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = 0 \\ \text{(g). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_k} &= -\frac{n}{a \lambda_k} \quad \text{(h). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_l} = 0 \\ \text{(i). } \frac{\partial^2 L_1(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} &= 0 . \end{aligned}$$

## Lampiran 11 (Lanjutan)

- Bagian kedua

$$L_2(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{i=1}^n (a-m) \ln A_{1i} \text{ dengan } A = \sum_{k=1}^m \left( \frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}.$$

Untuk  $k = 1, 2, \dots, m$ , turunan parsial orde pertama dari  $L_2(\boldsymbol{\theta}_0)$  adalah:

$$(a). \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n (aU_i + mM_i) A_i^{-1} \quad (b). \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k} = \left( \frac{a-m}{a} \right) \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{-1}$$

$$(c). \frac{\partial L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k} = - \left( \frac{a-m}{a} \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) D_{ki} A_i^{-1},$$

dengan

$$U_i = A_i \ln A_i - M_i; \quad M_i = \sum_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{a} B_{ki}; \quad U_i^* = M_i \ln A_i - M_i^*$$

$$B_{ki} = D_{ki} (\ln y_{ki} - \ln \lambda_k); \quad D_{ki} = \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}$$

Untuk  $k, l = 1, 2, \dots, m$ , turunan parsial orde kedua dari  $L_2(\boldsymbol{\theta}_0)$  adalah sebagai berikut:

$$(a). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ (a-m)(M_i^* A_i^{-1} - M_i^2 A_i^{-2}) - 2mM_i A_i^{-1} \right]$$

$$(b). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k^2} = \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n \left( B_{ki}^* A_i^{-1} - B_{ki}^2 A_i^{-2} \right)$$

$$(c). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k^2} = \left( \frac{a-m}{a} \right) \sum_{i=1}^n \left[ \left[ \frac{\gamma_k}{\lambda_k^2} + \frac{1}{a} \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^2 \right] D_{ki} A_i^{-1} - \frac{1}{a} \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^2 D_{ki}^2 A_i^{-2} \right]$$

$$(d). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \gamma_k} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ mB_{ki} A_i^{-1} + (a-m) \left( B_{ki} M_i A_i^{-2} - \frac{\gamma_k}{a} B_{ki}^* A_i^{-1} \right) \right]$$

$$(e). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \lambda_k} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ (a-m) \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \left[ \frac{\gamma_k}{a} B_{ki} A_i^{-1} - D_{ki} M_i A_i^{-2} \right] - m \frac{\gamma_k}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{-1} \right]$$

$$(f). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_k} = - \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{a}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{-1} + \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki} (A_i^{-1} - D_{ki} A_i^{-2}) \right]$$

**Lampiran 11** (Lanjutan)

$$(g). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_l} = \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_l}{\lambda_l} D_{li} B_{ki} A_i^{-2}$$

$$(h). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = - \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n B_{ki} B_{li} A_i^{-2}$$

$$(i). \frac{\partial^2 L_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} = - \left( \frac{a-m}{a^2} \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{\gamma_l}{\lambda_l} \right) D_{ki} D_{li} A_i^{-2}$$

dengan

$$M_i^* = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\gamma_k}{a} \right)^2 B_{ki} \ln \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right) \text{ dan } B_{ki}^* = B_{ki} (\ln y_{ki} - \ln \lambda_k).$$

• Bagian ketiga

Turunan parsial orde pertama dari  $L_3(\boldsymbol{\theta}_0) = - \sum_{i=1}^n A_i^a$  terhadap semua

komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$ , untuk  $k = 1, 2, \dots, m$  adalah sebagai berikut:

$$(a). \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a} = - \sum_{i=1}^n U_i A_i^{a-1} \quad (b). \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k} = - \sum_{i=1}^n B_{ki} A_i^{a-1}$$

$$(c). \frac{\partial L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_k}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{a-1}.$$

Turunan parsial orde kedua dari  $L_3(\boldsymbol{\theta}_0) = - \sum_{i=1}^n A_i^a$  terhadap semua

kombinasi komponen vektor  $\boldsymbol{\theta}_0$ , untuk  $k, l = 1, 2, \dots, m$  adalah sebagai berikut:

$$(a). \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a^2} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \left[ A_i U_i^* - (a U_i + M_i) U_i \right] A_i^{a-2}$$

$$(b). \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k^2} = - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \left[ A_i B_{ki}^* - (a-1) B_{ki}^2 \right] A_i^{a-2}$$

$$(c). \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k^2} = - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\gamma_k}{\lambda_k^2} D_{ki} A_i^{a-1} + \frac{1}{a} \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^2 \left( D_{ki} A_i^{a-1} + (a-1) D_{ki}^2 A_i^{a-2} \right) \right]$$

$$(d). \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \gamma_k} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ \gamma_k B_{ki}^* A_i^{a-1} - a(a U_i + M_i) B_{ki} A_i^{a-2} \right]$$

**Lampiran 11 (Lanjutan)**

$$\begin{aligned}
 \text{(e). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial a \partial \lambda_k} &= \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \left( a(aU_i + M_i) D_{ki} A_i^{a-2} - \gamma_k B_{ki} A_i^{a-1} \right) \right] \\
 \text{(f). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_k} &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{a-1} + \frac{1}{a} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \left( B_{ki} A_i^{a-1} + (a-1) B_{ki} D_{ki} A_i^{a-2} \right) \right] \\
 \text{(g). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \lambda_l} &= \frac{a-1}{a} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_l}{\lambda_l} D_{li} B_{ki} A_i^{a-2} \quad \text{(h). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = -\left(\frac{a-1}{a}\right) \sum_{i=1}^n B_{li} B_{ki} A_i^{a-2} \\
 \text{(i). } \frac{\partial^2 L_3(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} &= -\frac{a-1}{a} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{\gamma_l}{\lambda_l} \right) D_{ki} D_{li} A_i^{a-2}.
 \end{aligned}$$

• Bagian Keempat

$$L_4(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{i=1}^n \ln Q_i \quad \text{dengan} \quad Q_i = \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell+m} C(m, \ell, a) A_i^{(\ell-1)a}.$$

Tanpa kehilangan bentuk umumnya, pada bagian ini dibahas turunan parsial orde pertama dan kedua untuk  $Q_i$  pada kasus trivariat dan bivariat. Untuk kasus trivariat persamaan untuk  $Q_i$  adalah

$$Q_i = a(a-1)(a-2) - 3a^2(a-1)A_i^a + a^3A_i^{2a} \quad \text{dengan} \quad A = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{y_{ki}}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}.$$

Turunan parsial orde pertama dari  $Q_i$  untuk  $k=1,2,3$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial a} = \kappa_i + \phi_i U_i A_i^{a-1}, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \gamma_k} = \phi_i B_{ki} A_i^{a-1} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda_k} = -\phi_i \frac{\gamma_k}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{a-1}$$

dengan  $\kappa_i = 3[(a-1)^2 - a(3a-2)A_i^a + a^2A_i^{2a}] - 1$  dan  $\phi_i = 2a^3A_i^a - 3a^2(a-1)$ .

Turunan parsial orde kedua dari  $Q_i$  untuk  $k, l=1,2,3$  adalah sebagi berikut :

$$\begin{aligned}
 \text{(a). } \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a^2} &= \varphi_{1i} + \varphi_{5i} U_i + \varphi_{6i} U_i^* \quad \text{dengan} \\
 \varphi_{1i} &= 6(a-1) - 6(3a-1)A_i^a + 6aA_i^{2a}; \quad \varphi_{2i} = 6a^2A_i^{2a-1} - 3a(3a-2)A_i^{a-1}; \\
 \varphi_{3i} &= 2a^3U_iA_i^{2a-2}; \quad \varphi_{4i} = \frac{\phi_i}{a}(aU_i + M_i)A_i^{a-2}; \quad \varphi_{5i} = 2\varphi_{2i} + \varphi_{3i} + \varphi_{4i}; \\
 \varphi_{6i} &= -\frac{\phi_i}{a}A_i^{a-1}.
 \end{aligned}$$

**Lampiran 11** (Lanjutan)

$$(b). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k^2} = \frac{1}{a} (\rho_i B_{ki}^2 + \phi_i A_i B_k^*) A_i^{a-2}, \text{ dengan } \rho_i = 2a^4 A_i^a + (a-1)\phi_i.$$

$$(c). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \lambda_k^2} = \frac{1}{a} [\rho_i \gamma_k D_{ki} + (a + \gamma_k) \phi_i A_i] \frac{\gamma_k}{\lambda_k^2} D_{ki} A_i^{a-2}$$

$$(d). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \gamma_k} = (\varphi_{2i} + \varphi_{3i}) B_{ki} + V_{ki} A_i^{a-2}, \text{ dengan}$$

$$V_{ki} = \frac{1}{a^2} [a(aU_i + M_i) B_{ki} - \gamma_k A_i B_{ki}^*] \phi_i$$

$$(e). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \lambda_k} = -(\varphi_{2i} + \varphi_{3i}) \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki} + N_{ki} A_i^{a-2}, \text{ dengan}$$

$$N_{ki} = \frac{1}{a^2} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} [\gamma_k B_{ki} A - a(aU_i + M_i) D_{ki}] \phi_i$$

$$(f). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \lambda_k} = -(\delta_{ki} A_i + \frac{\rho_i}{a} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki} D_{ki}) A_i^{a-2} \text{ dengan}$$

$$\delta_{ki} = \frac{1}{a} (\frac{a}{\lambda_k} D_{ki} + \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki}) \phi_i$$

$$(g). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = \frac{1}{a} \rho_i B_{ki} B_{li} A_i^{a-2} \quad (h). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} = \frac{1}{a} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \frac{\gamma_l}{\lambda_l} \rho_i D_{ki} D_{li} A_i^{a-2}$$

$$(i). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \lambda_l} = -\frac{1}{a} \frac{\gamma_l}{\lambda_l} \rho_i B_{ki} D_{li} A_i^{a-2}.$$

Untuk kasus bivariat persamaan untuk  $Q_i$  adalah  $Q_i = -a(a-1) + a^2 A^a$

dengan  $A = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{a}}$ . Turunan-turunan parsial orde pertama dari  $Q_i$  untuk

$k=1,2$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial a} = 1 - 2a + 2a A_i^a + a^2 U_i A_i^{a-1}; \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \gamma_k} = a^2 B_{ki} A_i^{a-1} \text{ dan } \frac{\partial Q_i}{\partial \lambda_k} = -a^2 \frac{\gamma_k}{\lambda_k} D_{ki} A_i^{a-1}.$$

Turunan-turunan parsial orde kedua dari  $Q_i$  untuk  $k, l=1,2$  adalah sebagai berikut:

**Lampiran 11 (Lanjutan)**

$$(a). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a^2} = 2(A_i^a - 1) + a(4U_i - U_i^*)A_i^{a-1} + a(aU_i + M_i)U_i A_i^{a-2}$$

$$(b). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k^2} = -\gamma_k B_{ki}^* A_i^{a-1} + a(a-1)B_{ki}^2 A_i^{a-2} .$$

$$(c). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \lambda_k^2} = \left( a^2 \frac{\gamma_k}{\lambda_k^2} + a \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^2 \right) D_{ki} A_i^{a-1} + a(a-1) \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right)^2 D_{ki}^2 A_i^{a-2}$$

$$(d). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \gamma_k} = (2aB_{ki} - \gamma_k B_{ki}^*) A_i^{a-1} + a(aU_i + M_i) B_{ki} A_i^{a-2}$$

$$(e). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial a \partial \lambda_k} = \frac{\gamma_k}{\lambda_k} [(\gamma_k B_{ki} - 2aD_{ki}) A_i^{a-1} - a(aU_i + M_i) D_{ki} A_i^{a-2}]$$

$$(f). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \lambda_k} = -\left( \frac{a^2}{\lambda_k} D_{ki} + a \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki} \right) A_i^{a-1} - a(a-1) \frac{\gamma_k}{\lambda_k} B_{ki} D_{ki} A_i^{a-2}$$

$$(g). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \lambda_l} = -a(a-1) \frac{\gamma_l}{\lambda_l} B_{ki} D_{li} A_i^{a-2}$$

$$(h). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} = a(a-1) B_{ki} B_{li} A_i^{a-2}$$

$$(i). \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} = a(a-1) \left( \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right) \left( \frac{\gamma_l}{\lambda_l} \right) D_{ki} D_{li} A_i^{a-2} .$$

## Lampiran 12

### Prediksi nilai ekspektasi pengamatan respon pada model RWM

Prediksi Prediksi Nilai Ekspektasi Penaksir Pengamatan Respon

=====

EY123 =

24.2414	3.1220	0.2984
52.3071	5.3663	0.1981
60.9466	4.7949	0.0699
109.9285	6.1988	0.2308
100.2871	5.7287	0.2340
13.6344	2.3077	0.1615
15.2204	3.2312	0.1518
22.7495	4.8704	0.3613
38.8002	4.1195	0.4115
29.5074	3.5006	0.2784
13.9369	3.4223	0.1336
35.5694	4.5523	0.1403
30.5830	4.0443	0.1664
26.2499	3.7196	0.1879
32.0001	3.6392	0.5164
18.4525	3.7544	0.2415
13.3396	3.8281	0.1777
19.6768	2.9493	0.1465
23.9393	3.1556	0.2750
23.5962	4.4827	0.2834
61.5369	6.0311	0.3076
44.5123	4.8914	0.2797
44.8081	4.8551	0.3810
24.6546	3.2090	0.3772
16.3167	3.5324	0.2058
13.2109	3.8837	0.2023
30.4159	3.7008	0.2738

=====

MSE dari Prediksi Nilai Pengamatan Respon

=====

MSE\_Y =

551.5943	2.2519	0.0424
----------	--------	--------

=====